

## REGNEREGLER FOR DIFFERENTIALKVOTIENT - SUM OG DIFFERENS

Før vi starter på de to beviser, forklares det her, hvad det er, vi ønsker at bevise.

På Figur 1 ser man graferne for tre funktioner  $f$ ,  $g$  og  $(f + g)$ . På figuren er der markeret et punkt på alle tre grafer ved  $x_0 = 1,5$ . Ser vi nærmere på figuren konstaterer vi, at andenkoordinaten for punktet på grafen for  $f$  er 4,50, for punktet på grafen for  $g$  er andenkoordinaten 1,93 og for punktet på grafen for  $f + g$  er andenkoordinaten 6,43. Vi har altså:

$$f(1,5) + g(1,5) = 4,50 + 1,93 = 6,43 = (f + g)(1,5)$$

Dette stemmer overens med vores tidligere overvejelser om at kombinere funktioner. Lægger vi altså funktionsværdierne for  $f$  og  $g$  sammen i  $x_0 = 1,5$ , har vi funktionsværdien for funktionen  $f + g$  ved  $x_0 = 1,5$ . Vi definerede tidligere:

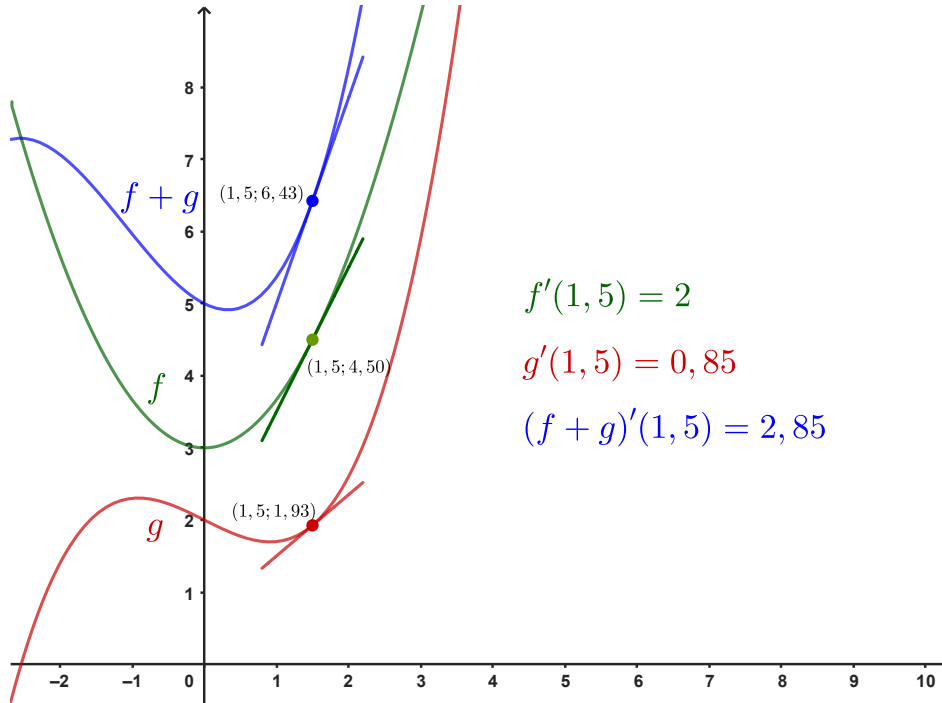
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

I den sammenhæng definerede vi også at:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad ^1$$

På figuren er differentialkvotienterne for de tre funktioner også vist i  $x_0 = 1,5$ . Husk på, at dette er et udtryk for de tre tangenters hældninger. Vi kan se, at

$$f'(1,5) + g'(1,5) = 2 + 0,85 = 2,85 = f'(1,5) + g'(1,5) = (f + g)'(1,5)$$



**Figur 1** Tre grafer for funktionerne  $f$ ,  $g$  og  $f + g$ . Ved  $x_0 = 1,5$  er der i alle tre tilfælde markeret et koordinatsæt for punktet på grafen og en tangent ved dette røringpunkt. Differentialkvotienterne i  $x_0 = 1,5$  er beregnet og vist på figuren.

<sup>1</sup> Man kan benytte de samme grafer til også at vise dette ved eksempel. Vi har gjort dette tidligere.

Fra eksemplet tyder det på, at følgende regel gælder<sup>2</sup>:

$$(f + g)'(x_0) = (f(x_0) + g(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0) \quad (1)$$

Har vi en sum af to funktioner, og vil vi bestemme den afledte funktion, så kan vi tilsyneladende blot differentiere først den ene funktion og derefter den anden funktion, og derefter lægge de to sammen.

Helt tilsvarende vil det gælde, hvis vi trækker funktionerne fra hinanden, og altså ser på deres differens. Vi kan skrive det således:

$$(f - g)'(x_0) = (f(x_0) - g(x_0))' = f'(x_0) - g'(x_0) \quad (2)$$

Formel (1) i dette dokument svarer til formel (175) i formelsamlingen og formel (2) svarer til formel (176) i formelsamlingen. **Det er dog værd at bemærke, at formlerne i formelsamlingen skrives op som de afledte funktioner, og ikke som differentialkvotienten i  $x_0$ .** Det er de to formler (1) og (2), som vi gerne vil vise gælder generelt for differentiable funktioner.

I har brugt de regneregler flere gange. Her er nogle eksempler, hvor vi bestemmer de afledte funktioner<sup>3</sup>:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \ln(x), \quad x > 0$$

Husk på at  $\frac{1}{3}x^3$  og  $\ln(x)$  er funktioner! Bruger vi reglen for sum har vi:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \ln(x)\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + (\ln(x))' = x^2 + \frac{1}{x}$$

Her er et eksempel for differensreglen:

$$g(x) = \sqrt{x} - x^5, \quad x \geq 0$$

Vi differentierer ved at bruge reglen:

$$g'(x) = (\sqrt{x} - x^5 - 9)' = (\sqrt{x})' - (x^5)' - (9)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 5x^4$$

Med ovenstående er det forhåbentligt klart, hvad vi vil bevise.

Det er forhåbentligt også klart, hvordan dette relateres til grafer og til tangenternes hældninger på Figur 1.

---

<sup>2</sup> Her skal man huske, at vi har defineret  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , så deraf følger det at  $(f + g)'(x) = (f(x) + g(x))'$ . Det er ikke det, vi vil vise. Tilsvarende gælder for differensen.

<sup>3</sup> I eksemplerne finder vi ikke differentialkvotienterne  $f'(x_0)$ .

**SÆTNING:** Lad  $f$  og  $g$  være differentiable funktioner i  $x_0$ . Da gælder det, at funktionen  $f + g$  er differentiable i  $x_0$  og denne regneregler gælder<sup>4</sup>:

$$(f + g)'(x_0) = (f(x_0) + g(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0) \quad (3)$$

Vi benytter tretrinsreglen til at bevise dette.

**BEMÆRK:** Da funktionerne  $f$  og  $g$  er differentiable i  $x_0$  gælder det at:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &\rightarrow f'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \\ \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} &\rightarrow g'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4)$$

**BEVIS: I første trin** opskriver vi som altid differenskvotienten. Her er det for  $f + g$  :

$$\frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h} = \frac{(f(x_0 + h) + g(x_0 + h)) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} \quad (5)$$

I det **andet trin** omskriver vi differenskvotienten og her benyttes udtrykket i (5) som start:

$$\begin{aligned} &\frac{(f(x_0 + h) + g(x_0 + h)) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \end{aligned} \quad (6)$$

**Tredje trin:** Bemærk nu at brøkerne markeret med blå og rødt i (6), idet vi udnytter viden fra (4), giver os<sup>5</sup>:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0) + g'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \quad (7)$$

■

<sup>4</sup> Her er  $(f + g)'(x_0) = (f(x_0) + g(x_0))'$  en triviel omskrivning. Det er "det afsluttende lighedstegn", der bevises.

<sup>5</sup> Vi har vist, at differenskvotienten for  $(f + g)(x_0) = (f(x_0) + g(x_0))$  for  $h \rightarrow 0$  har samme grænseværdi som differenskvotienten for  $f(x_0)$  for  $h \rightarrow 0$  plus differenskvotienten for  $g(x_0)$  for  $h \rightarrow 0$ .

**SÆTNING:** Lad  $f$  og  $g$  være differentiable funktioner i  $x_0$ . Da gælder det, at funktionen  $f - g$  er differentiable i  $x_0$  og denne regneregler gælder<sup>6</sup>:

$$(f - g)'(x_0) = (f(x_0) - g(x_0))' = f'(x_0) - g'(x_0) \quad (8)$$

Vi benytter tretrinsreglen til at bevise dette.

**BEMÆRK:** Da funktionerne  $f$  og  $g$  er differentiable i  $x_0$  gælder det at:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &\rightarrow f'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \\ \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} &\rightarrow g'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (9)$$

**BEVIS: I første trin** opskriver vi som altid differenskvotienten. Her er det for  $f - g$ :

$$\frac{(f - g)(x_0 + h) - (f - g)(x_0)}{h} = \frac{(f(x_0 + h) - g(x_0 + h)) - (f(x_0) - g(x_0))}{h} \quad (10)$$

I det **andet trin** omskriver vi differenskvotienten og her benyttes udtrykket i (10) som start:

$$\begin{aligned} &\frac{(f(x_0 + h) - g(x_0 + h)) - (f(x_0) - g(x_0))}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - g(x_0 + h) - f(x_0) + g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0 + h) + g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - (g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \end{aligned} \quad (11)$$

**Tredje trin:** Bemærk nu at brøkerne markeret med blå og rødt i (11), idet vi udnytter viden fra (9), giver os<sup>7</sup>:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0) - g'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \quad (12)$$

■

<sup>6</sup> Her er  $(f - g)'(x_0) = (f(x_0) - g(x_0))'$  en triviel omskrivning. Det er "det afsluttende lighedstegn", der bevises.

<sup>7</sup> Vi har vist, at differenskvotienten for  $(f - g)(x_0) = (f(x_0) - g(x_0))$  for  $h \rightarrow 0$  har samme grænseværdi som differenskvotienten for  $f(x_0)$  for  $h \rightarrow 0$  minus  $g(x_0)$  for  $h \rightarrow 0$ .

## REGNEREGEL FOR DIFFERENTIALKVOTIENT – KONSTANT GANGE FUNKTION

Her bevises formel (174) i formelsamlingen.

**SÆTNING:** Lad  $f$  være en differentiabel funktion i  $x_0$  og lad  $k$  være en konstant. Da gælder:

$$(kf(x_0))' = kf'(x_0) \quad (13)$$

Vi benytter tretrinsreglen til at bevise det.

**BEMÆRK:** Da funktionen  $f$  er differentiable i  $x_0$  gælder det at:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \quad (14)$$

**BEVIS: I første trin** opskriver vi som altid differenskvotienten. Her er det for  $kf$ :

$$\frac{kf(x_0 + h) - kf(x_0)}{h} \quad (15)$$

I det **andet trin** omskriver vi differenskvotienten og her benyttes udtrykket i (15) som start:

$$\frac{kf(x_0 + h) - kf(x_0)}{h} = \frac{k(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} = k \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (16)$$

**Tredje trin:** Bemærk nu at brøken markeret med rødt i (16), idet vi udnytter viden fra (14), giver os

$$k \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \rightarrow kf'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \quad (17)$$

■

Afsluttende note.

Beviserne kan opskrives ved at benytte denne definition

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

i stedet for

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0$$

De to forskellige måder at skrive definitionen for differentiabilitet af funktionen  $f$  i  $x_0$  er omtalt i dokumentet `beviser_differentialkvotienter - 2a 25_26.pdf`.

Vi kan naturligvis skrive det sammen for funktionen  $g$ .