Differentialregning – kæderegel og produktregel

Skriftlige løsningsforslag med tydelige funktionsnavne

Dette dokument viser to måder at skrive løsningsforslag på, når man arbejder med differentialregning og med sammensatte funktioner og produktet af to funktioner.

Ideen er at introducere tydelige navne for funktionerne, så eksempelvis $f(x)$ ikke optræder to gange i et løsningsforslag. I formelsamlingen er det (177) og (178) vi ser nærmere på.

- Ved **sammensatte funktioner** introduceres $I(x)$ for den **indre funktion** og $Y(x)$ for den **ydre funktion**.
- Ved **produktreglen** introduceres $F_1(x)$ og $F_2(x)$ for de to **faktorer**.

---

1. Sammensat funktion: indre og ydre funktion. Kædereglen.

Betragt funktionen

$$f(x) = \ln(x^2 + 3x - 2)$$

Denne funktion er sammensat af en indre og en ydre funktion.

Vi kalder den **indre funktion**

$$I(x) = x^2 + 3x - 2$$

Den **ydre funktion** er logaritmefunktionen:

$$Y(x) = \ln(x)$$

Da kan vi skrive funktionen f således

$$f(x) = Y(I(x))$$

Kædereglen

Når vi differentierer en sammensat funktion, bruger vi kædereglen som er (178) i formelsamlingen, men nu skrevet anderledes end i formelsamlingen:

$$f'(x) = Y'\big(I(x)\big) \cdot I'(x)$$

Vi differentierer først den indre funktion:

$$I'(x) = 2x + 3$$

Vi differentierer den ydre funktion

$$Y'(x) = \frac{1}{x}$$

Nu kan vi bruge reglen, hvor vi først for klarheds skyld konstaterer at:

$$Y'\big(I(x)\big) = \frac{1}{I(x)} = \frac{1}{x^2 + 3x - 2}$$

Kædereglen giver derfor:

$$f'(x) = Y'\big(I(x)\big) \cdot I'(x) = \frac{1}{x^2 + 3x - 2} \cdot (2x + 3) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 2}$$

2. Produktreglen: første og anden faktor introduceres

Vi ser nu på en funktion, hvor to funktioner ganges sammen:

$$f(x) = (x^2 + 3x) \cdot \ln(x)$$

Her består funktionen af to faktorer.

Vi kalder den første faktor – altså den første funktion i udtrykket

$$F_1(x) = x^2 + 3x$$

og den anden faktor

$$F_2(x) = \ln(x)$$

Dermed kan funktionen f skrives som

$$f(x) = F_1(x) \cdot F_2(x)$$

Produktreglen

Produktreglen – det er (177) i formelsamlingen – skrives dermed således:

$$f'(x) = F_1'(x) \cdot F_2(x) + F_1(x) \cdot {F_2}'(x)$$

Med ord kan man sige:

> Den afledte af første faktor gange anden faktor plus første faktor gange den afledte af anden faktor.

Vi differentierer nu de to faktorer hver for sig.

Første faktor giver dermed

$$F_1'(x) = 2x + 3$$

Anden faktor giver os

$$F_2'(x) = \frac{1}{x}$$

Vi indsætter i produktreglen:

$$f'(x) = F_1'(x) \cdot F_2(x) + F_1(x) \cdot F_2'(x)$$

$$f'(x) = (2x + 3) \cdot \ln(x) + (x^2 + 3x) \cdot \frac{1}{x}$$

Så vi får

$$f'(x) = (2x + 3) \cdot \ln(x) + \frac{x^2 + 3x}{x} = (2x + 3) \cdot \ln(x) + x + 3$$