**Forløb i rentesregning**

**Kapitalfremskrivningsformlen (Renteformlen)**

Rente er et beløb, man betaler for at låne penge. Renten betales af den, der låner penge (låntageren) til den, der låner pengene ud (långiveren).

Man kan betragte renten som en betaling for, at långiveren ikke selv kan bruge beløbet og at pengene vil miste værdi i løbet af tiden pga. inflation.

Sætter vi penge i banken, er det os der er långiver, og derfor betaler banken os rente…kaldet *indlånsrente.*

Men hvis det er os, der låner penge i banken, er der os der skal betale rente til banken…kaldet *udlånsrente.*

Renten beregnes som en procentdel af det beløb, der skyldes. Procentværdien kaldes rentesatsen. Rentesatsen kan f.eks. lyde på 2,75% p.a. hvor p.a. er forkortelse for ”pro anno” , der betyder ”pr. år”. Rentesatsen omskrives ofte i beregninger til et decimaltal, og kaldes så for *rentefoden/vækstraten.*

I det følgen skal vi lære at benytte kapitalfremskrivningsformlen/renteformlen, som er givet ved:



Hvor:

|  |  |
| --- | --- |
| *K0* | Startkapital |
| *n* | Antallet af terminer |
| *Kn* | Kapital efter *n* terminer |
| *r* | Rentefoden |
| (1+*r*) | Fremskrivningsfaktoren |

Man først vil vi bevise sætningen: Der sættes en startkapital (*K0*) ind på en konto med rentefoden *r*.

Efter 1. termin tilskrives renter og kapitalen vokser til:



Vi vil nu overveje hvordan kapitalen vokser efter de følgende terminer:







osv….



osv….

Det samlede resultat af denne overvejelse er:

Renteformlen:  *(bevis slut)*

Heraf kan vi også finde følgende formler:

|  |  |
| --- | --- |
| Startkapital:  | Fremskrivningsfaktor:  |
| Rentefod:  | Antal terminer (har ikke set det endnu):  (”log” er en knap på lommeregneren) |

Vi vil i det følgende gennem opgaver og eksempler lære at benytte disse formler.

Renteformlen ser reelt på udviklingen af en størrelse, der vokser med samme procent pr. tidsenhed (time/uge

/kvartal/ år osv.)

Som model benyttes en bankkonto, hvor der står 6000 kr. Hvert år tilføjes der en rente på 4% (pro anno). (Det kunne også være andet end en bankkonto -se nedenstående eksempler).

Dvs K0 = 6000

 K1 = 6000∙1,04 =

 K2 = 6000 ∙ 1,04∙1,04 = 6000∙1,042 =

Efter n år ?

 Kn= 6000∙1,04n

**De nedenstående opgaver er alle eksempler på *fremskrivninger*, altså at man ud fra ”K0”**

**Beregner ”Kn”.**

Opgave 1

1. Der indsættes et beløb på 500 kr. i banken med en rentesats på 4% p.a. Hvad står der på kontoen efter ét år ?
2. Prisen på mælk, der er 5,50 kr. for 1 L forhøjes med 1,75%. Hvad bliver den nye pris?
3. Et firma producerer 11000 enheder af en vare i et bestemt år og forventer en stigning på 111% inden næste år er gået. Hvad er produktionen i det nye år ?
4. En bluse til 300 kr. nedsættes under et udsalg med 30%. Hvad er udsalgsprisen ?

**De nedenstående opgaver er alle eksempler på *tilbageskrivninger*, altså at man ud**

**fra ”Kn” beregner ”K0.**

Opgave 2

1. På Lises konto står det efter den første årlige rentetilskrivning 625 kr. Hvor meget stod der på kontoen året før, når bankens rente er 4.5%.
2. En pose slik koster 19,95 kr. inkl. 25% moms. Hvad er nettoprisen (altså prisen uden

moms) .

1. Et firma har øget deres produktion af hoppebolde til 6700 stk., hvilket er en forøgelse på 12,5% procent i forhold til året før. Hvor mange hoppebolde producerede firmaet året før?

Opgave 3

1. En kapital på 7500 kr. vokser med 15% pr. år
2. Hvad er fremskrivningsfaktoren ?
3. Hvor stor er kapitalen efter 6 år?
4. Hvor mange år går der, før kapitalen kommer over 12000 kr.
5. En kapital på 5000 kr. sættes i banken. Det første år er renten 3%, det andet år er den 2,5% og det tredje år er 2,2%, hvor mange penge står der på kontoen efter tre års forløb ?
6. En cellekultur vokser med 3,5% pr. time, og begyndelsesværdien er 200 celler. Efter 24 timer indeholder den hvor mange celler?
7. En fiskebestand aftager med 3,75 % pr. kvartal. Begyndelsesværdien er 750 tons. Efter 5 års forløb, hvilket er …………………kvartaler, forudses bestanden til at være sunket til:

**Effektive rente**

Bankerne angiver ofte den pålydende rente *rår* i % pr. år, også kaldet p.a. (pro anno). Men hvis der foretages rentetilskrivninger oftere vil den faktiske årlige rente bliver større pga. renters rente. Den faktiske årlige rente *re* i % kaldes den *effektive rente*.

Renters rente er et begreb der bruges om dét at forrente den samme beholdning af penge flere gange. Det kan bruges til f.eks. at finde ud af, hvor mange penge der vil stå på en konto til et givet tidspunkt i fremtiden.

En anden måde at sige det på kunne være, at man får renters rente fordi man også får renter af de foregående indbetalingers renter. Eller betaler renters rente afhængig af om der er tale om indlån eller udlån.

**Eksempel: Beregning af renters renter**

På en opsparings konto indsættes 1000 kr. Rentefoden er 2% p.a.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Termin | Penge på kontoen | Overskudet/kr. | Renters rente/kr. |
| 0 | 1000 | 0 | 0 |
| 1 | 1020 | 20 | 0 |
| 2 | 1040,4 | 40,4 | 0,4 |
| 3 | 1061,21 | 61,21 | 0,808 |
| 4 | 1082,43 | 82,43 | 1,22 |

**Eksempel: Årlig effektive renteudgift**

Man kunne fristes til at tro, at ved et lån til 12% p.a. er den samme som ved et lån til 1% pr. måned.

Men sådan er det IKKE !

Ved månedlige rentetilskrivninger kommer man hurtigere til at betale rentes rente, og derfor bliver det samlede rentebeløb større. Se nedenstående eksempel :

**A låner** 1500000 kr i banken til 12% p.a. med helårlig rentetilskrivning. Efter et år skylder han banken: 1500000 ∙ 1.12 = 1680000 kr.

**B låner** også 1500000 kr. i banken til 1% pr. måned med månedlig rentetilskrivning. Efter et år

Skylder han banken:

 1.500000 ∙ 1.0112 = 1690237,50 kr.

Forskellen i renteudgiften er: 10237,50 kr !!

Dvs B har betalt mere en 12% i rente.

Af ovenstående kan man altså se at 12% p.a. ikke er det samme som 1% pr. måned !

Den rente B reelt har betalt pr. år kaldes **den nominelle rente** eller **den *effektive* rente (*rår*)**

Vi udregner nu hvad den *effektive* rente har været for B:

1500000∙(1+rår) = 1690237,50

 (1+rår) =1690237,50 /1500000

 (1+rår) = 1,1268

 rår = 0,1268

Altså har B´s nominelle rente været 12.68% !

**Vi vil nu udlede en generel formel for den årlige effektive rente:**

**Teoretisk udledning**

Ved *n* rentetilskrivninger med rentefoden *r* vokser kapitalen *K0* efter et år med:

 (1)$ K\_{n}$=$K\_{0}\left(1+r\right)^{n}$

For at opnå den samme slutkapital med en enkelt årlig rentetilskrivning *re* hvor *n* = 1 termin må:

(2) $K\_{n}$=$K\_{0}(1+r\_{e})$

Ved at sammenligne (1) og (2) får vi:

$$K\_{0}(1+r\_{e}) =K\_{0}\left(1+r\right)^{n}$$

 $1+r\_{e}=\left(1+r\right)^{n}$

$r\_{e}=\left(1+r\right)^{n}-1$ (*sætning 2, s. 86*)

Heraf kan den årlige effektive rentefod *re* bestemmes.

Tilsvarende formler kan vi finde ved f.eks. kvartårlige eller halvårlige rentetilskrivninger:

 eller 

Opgave 4

Tim låner et beløb til 12% p.a. med kvartålig rentetilskrivning. Hvad bliver Tims årlige

effektive rente i procent?

Opgave 5

Elise skal bruge 20000 kr. om 6 år til en rejse. Hvor mange penge skal hun indsætte på kontoen, når banken giver 4.2 % p.a. med halvårlig tilskrivninger ?

Opgave 6

Du sætter et beløb på 1200 kr. i banken, hvor der forrentes med 5% p.a. med halvårlige rentetilskrivninger.

Hvor mange penge står der på kontoen efter et halvt år ? Efter 10 år ?

**Gennemsnitlig rente**

Hvis rentefødderne *r1*, *r2*, *r3*, ..., *rn* i hver af de *n* terminervarierer, kan vi finde den gennemsnitlige rentefod *rg.* Med den gennemsnitlige rentefod, menes den rente man skulle have haft i hele perioden for at nå samme slutkapital somi de *n* terminer.

Vi ser på et eksempel:

Ishaac sætter 1000 kr. ind på sin bankkonto, hvor de står i 4 år. Første år er rentefoden 1% p.a., andet år er den 2% p.a., tredje år er den 4% p.a. og det fjerde år er den 9% p.a. Hvad har den gennemsnitlige rentefod været i de fire år?

Efter 0 terminer: 1000,00 kr.

Efter 1. termin: 1000,00·1,01=1010,00 kr.

Efter 2. termin:1010,00 kr·1,02=1030,20 kr.

Efter 3. termin:1030,20 kr.· 1,04= 1071,41 kr.

Efter 4. termin: 1071,41 kr.· 1,09= 1167,83 kr.

Dette slutresultat kunne man også beregne ved: 1000,00 kr.·1,01·1,02·1,04·1,09=1167,83 kr.

Gennemsnitrenten kan man bestemme ved at isolere r i følgende udtryk:

$$1167,83=1000·\left(1+r\right)^{4}$$

$$\frac{1167,83}{1000}=\left(1+r\right)^{4}$$

$$1+r=\sqrt[4]{\frac{1167,83}{1000}}$$

$r=\sqrt[4]{\frac{1167,83}{1000}}$ -1= 3,96%

Bemærk at dette er ikke det samme som:$\frac{1\%+2\%+4\%+9\%}{4}=4\%$.

Det viser sig at man kan beregne den gennemsnitlige rente uden at kende den indsatte kapital, da

$$1000,00 kr.·1,01·1,02·1,04·1,09=1000·\left(1+r\right)^{4}$$

$$1,01·1,02·1,04·1,09=\left(1+r\right)^{4}$$

$r=\sqrt[4]{1,01·1,02·1,04·1,09}$ -1

Denne regel gælder generelt, overvej nedenstående:







osv….

(3) 

For at opnå den samme slutkapital med en gennemsnitlig rentetilskrivning *r* efter *n* terminer må:

(4) 

Ved at sammenligne (3) og (4) ses:

 ⇔

 ⇔

$$ 1+r\_{g}=\sqrt[n]{\left(1+r\_{1}\right)·\left(1+r\_{2}\right)·\left(1+r\_{3}\right)·……·\left(1+r\_{n}\right)}$$

$$ r\_{g}=\sqrt[n]{\left(1+r\_{1}\right)·\left(1+r\_{2}\right)·\left(1+r\_{3}\right)·……·\left(1+r\_{n}\right)}-1$$

Heraf kan den gennemsnitlige rentefod *rg* bestemmes.

Opgave 7

På en bankkonto er renten 3%, 5%, 2% og 6% i løbet af de fire første år. Med den gennem­snitlige rente forstås den rentesats som ville give den samme indestående som ovenstående, men hvor rentesatsen er konstant. Hvor stor var den gennemsnitlige rente?