Bogstavudtryk i matematik - introduktion

Regning med tal

Det er almindeligt kendt, at vi i matematik bruger symbolske udtryk indeholdende tal og regnearter. De tre almindelige regnearts-par er plus/minus, gange/dividere og potens/rod.

Regnearterne er relateret. Gange er gentagelser af plus:

$$\underbrace{4+4+4+4+4+4}_{6\text{ gentagelser}} = 4 \cdot 6$$

Division er det omvendte af gange. De ophæver så at sige hinanden: $\frac{4\cdot 6}{6} = 4$ og $\frac{4}{6} \cdot 6 = 4$

Potens er ligeledes gentagelser af gange:

$$\underbrace{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4}_{6\text{ gentagelser}} = 4^6$$

Rod er det omvendte af potens. De ophæver også hinanden: $\sqrt[6]{4^6} = 4$ og $\sqrt[6]{4}^6 = 4$

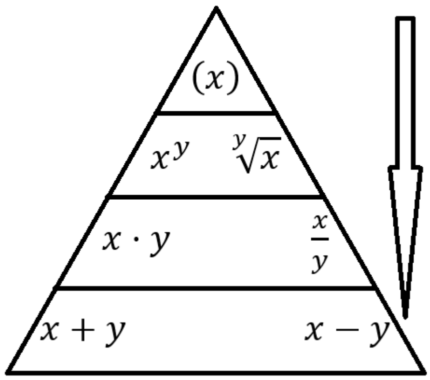
Og grundlæggende set er plus gentagelser af ”tælleoperationen” som kunne kaldes ”plus 1”:

$$4 \underbrace{+1+1+1+1+1+1}_{6\text{ gentagelser}} = 4+6$$

Minus er det omvendte af plus, og de ophæver også hinanden: $4+6-6=4$ og $4-6+6=4$.

Eksempler på udtryk: $\mathbf{4^2 - 3 \cdot 2 + \sqrt{9}}$ og $\mathbf{5 + 3 \cdot 2^4 + \frac{\sqrt[5]{32}}{2}}$.

Ved hjælp af det såkaldte *regnehierarki* ved vi i hvilken rækkefølge de enkelte dele udregnes:



$$\mathbf{4^2 - 3 \cdot 2 + \sqrt{9} = 16 - 6 + 3 = 10 + 3 = 13}$$

$$\mathbf{5 + 3 \cdot 2^4 + \frac{\sqrt[5]{32}}{2} = 5 + 3 \cdot 16 + \frac{2}{2} = 5 + 48 + 1 = 54}$$

Ønsker vi en anden rækkefølge, anvendes *eksplicit* parentes:

$$\mathbf{(2 \cdot 3)^2 + 4 \cdot (7-5) = 6^2 + 4 \cdot 2 = 36 + 8 = 44}$$

Regnehierarkiet fortæller os altså hvilke parenteser vi ikke behøver at skrive. Det gælder f.eks.:

$4^2 - 3 \cdot 2 + \sqrt{9} = (4^2) - (3 \cdot 2) + \left(\sqrt{9}\right)$ og $5 + 3 \cdot 2^4 + \frac{\sqrt[5]{32}}{2} = 5 + (3 \cdot (2^4)) + \left(\frac{\sqrt[5]{32}}{2}\right)$

De eksplicitte parenteser til højre for lighedstegnet må altså gerne skrives, men behøves ikke. Hvis vi udelader en parentes, kaldes denne for *implicit*.

Bemærk at brøker har implicit parentes om tæller og nævner. Således gælder:

$\frac{(10+18)}{(9-2)} = \frac{10+18}{9-2} = \frac{28}{7} = 4$ og altså forskelligt fra $10 + \frac{18}{9} - 2 = 10 + 2 - 2 = 10$

Også rod-tegn har en implicit parentes om udtrykket ”under” rodtegnet:

$\sqrt{(4 \cdot 9)} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$, som er forskelligt fra: $\sqrt{4} \cdot 9 = 2 \cdot 9 = 18$.

Når vi ser på et regneudtryk, adskiller plus/minus altså udtrykket i dets grundlæggende dele. Hver del adskilt af plus og minus kaldes for *et led*. Man kan altid sætte eksplicit parentes om hvert led:

$$7 \cdot 8 + 4 \cdot 5^3 - 9 \cdot \sqrt{49} + \frac{8}{2} = (7 \cdot 8) + (4 \cdot 5^3) - \left(9 \cdot \sqrt{49}\right) + \left(\frac{8}{2}\right)$$

Udtrykket har altså fire *led*, som skal udregnes hver for sig, før man regner leddene sammen.

Inden for det enkelte led, kalder vi størrelser adskilt af gangetegn for *faktorer*. Det ses at de første tre led i ovenstående eksempel, hver indeholder to faktorer:

$$\mathbf{7 \cdot 8 + 4 \cdot 5^3 - 9 \cdot \sqrt{49} + \frac{8}{2}} \quad = \quad ((\mathbf{7}) \cdot (\mathbf{8})) + ((\mathbf{4}) \cdot (\mathbf{5^3})) - \left((\mathbf{9}) \cdot (\sqrt{\mathbf{49}})\right) + \left(\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{2}}\right)$$

Et led kan godt indeholde en faktor, som i sig selv indeholder led og faktorer. F.eks.:

$$8 \cdot (2 + 3 + 4 \cdot 5) - 9 \cdot (1 + 2)$$

Udtrykket indeholder to led adskilt af et minus. Hvert led består af to faktorer. Det første led har en faktor med tre led (2, 3, og $4 \cdot 5$), hvoraf det ene har to faktorer (4 og 5). Det andet led har en faktor med to led (1 og 2).

Om negative tal gælder, at de skrives i parentes. F.eks. $5 + (-2) = 3$ og $(-2) \cdot (-6) = 12$.

Parentesen betyder meget ved potensregning hvor $(-3)^2 = 9$, mens $-3^2 = -9$.
Forskellen kommer af at $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ mens $-3^2 = -(3^2) = -(3 \cdot 3) = -9$’

Opgave 1

Udregn følgende regnestykker:

a) $3+7-2+9-6+3$

b) $3+(7-2)+(9-6)+3$

c) $3+7-(2+9)-(6+3)$

Opgave 2

Sæt eksplicit parentes om hvert led i følgende udtryk, og udregn udtrykket:

a) $4\cdot 3-2\cdot 5+3\cdot 7-19$

b) $10\cdot 2^2+8\cdot 3-2^3\cdot 5+\frac{24}{3}$

c) $\sqrt{2\cdot 32}+3^3-8\cdot\sqrt{9}+5$

Opgave 3

Udregn følgende regneudtryk - sæt eksplicit parentes om hvert led, hvis du er i tvivl:

a) $10^2-6\cdot 3^3-2\cdot 11$

b) $5\cdot 3-10\cdot 2+3^2$

c) $9\cdot 10-8\cdot 5+\frac{18}{3}-(8+2)$

d) $\sqrt{81}-\left(\frac{10}{2}\right)^2+\frac{6^2}{3}+\frac{7+9}{2}$

e) $3\cdot(2+5)-(5-3)^4+\sqrt{81-3\cdot 14}$

f) $\frac{14}{7}\cdot 4^2-\sqrt{3\cdot 48}\cdot 5+\sqrt{3^2+2^2+\frac{24}{2}}\cdot 2+7$

g) $(2\cdot 4+5)^2-\sqrt{3\cdot 12}\cdot 10+\sqrt[3]{8}^4\cdot 2-\sqrt{6^2+4^3}$

Symbolske udtryk (bogstavudtryk)

I matematik arbejder vi ofte med udtryk der udover tal og regnearter, også indeholder bogstaver. F.eks. udtryk som $\boldsymbol{a + 2b + 3c}$ og $\boldsymbol{a^2 + a \cdot b - \frac{c}{a}}$.

Bogstaverne er principielt pladsholdere for *tal*. Det betyder at man kan forestille sig at man på hvert sted hvor der står et bestemt bogstav, f.eks. a, indsætter samme tal-værdi.

Eksempel: Givet udtrykket: $\boldsymbol{a + b^2 - a^2 + b}$

For $a = 1$ og $b = 3$ fås værdien: $1 + 3^2 - 1^2 + 3 = 1 + 9 - 1 + 3 = 12$
For $a = 5$ og $b = 2$ fås værdien: $5 + 2^2 - 5^2 + 2 = 5 + 4 - 25 + 2 = -14$
For $a = -2$ og $b = 10$ fås værdien: $(-2) + 10^2 - (-2)^2 + 10 = -2 + 100 - 4 + 10 = 104$

Når vi skriver a^2 mener vi $a \cdot a$. På samme måde gælder at $c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c = c^5$.

Vi vil desuden forkorte $a + a$ med udtrykket $2 \cdot a$. Her taler vi om *eksplicit* gangetegn. Et tal ganget med et bogstav kan også skrives med et implicit gangetegn som $2 \cdot a = 2a$.

Således gælder: $b + b + b + b = 4 \cdot b$ og $d + d + d = 3d$.

Vi tillader at forskellige bogstaver ganges: $a \cdot b$ og $c \cdot d \cdot d \cdot e$, som også kan skrives ab og cd^2e.

Til gengæld skal der altid skrives eksplicit gangetegn mellem tal. $4 \cdot 2$ kan ikke skrives 42.

Eksempel: Givet udtrykket: $\boldsymbol{7x - 4y^2 + 10x \cdot y}$

For $x = \mathbf{1}$ og $y = \mathbf{3}$ fås: $7 \cdot \mathbf{1} - 4 \cdot \mathbf{3}^2 + 10 \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{3} = 7 - 4 \cdot 9 + 30 = 37 - 36 = 1$
For $x = \mathbf{5}$ og $y = \mathbf{2}$ fås: $7 \cdot \mathbf{5} - 4 \cdot \mathbf{2}^2 + 10 \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{2} = 35 - 4 \cdot 4 + 100 = 135 - 16 = 119$
For $x = \mathbf{-2}$ og $y = \mathbf{10}$ fås: $7 \cdot (\mathbf{-2}) - 4 \cdot \mathbf{10}^2 + 10 \cdot (\mathbf{-2}) \cdot \mathbf{10} = -14 - 400 - 200 = -614$

Principielt er det ligegyldigt om der anvendes bogstaver eller andre symboler. Bogstaverne er *kun* symboler der repræsenterer potentielle talværdier. Bogstaver er fornuftige symboler, fordi vi har nemt ved at omgås dem. Men i princippet kunne ethvert symbol bruges:

Eksempel: Givet udtrykket: $3\spadesuit - 5\heartsuit^2 + \sqrt{\spadesuit + \heartsuit}$

For $\spadesuit = 7$ og $\heartsuit = 2$ fås: $3 \cdot 7 - 5 \cdot 2^2 + \sqrt{7 + 2} = 21 - 5 \cdot 4 + \sqrt{9} = 21 - 20 + 3 = 4$

I praksis anvender vi altid bogstaver, og der vil ikke være flere eksempler som det her viste.

Opgave 4

Et udtryk er givet ved: $2a + 3b - a \cdot b$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 2$ og $b = 1$.

b) Bestem værdien af udtrykket for $a = 4$ og $b = 3$.

c) Bestem værdien af udtrykket for $a = 5$ og $b = -1$.

Opgave 5

Et udtryk er givet ved: $5a - 3b + 2a \cdot b$.

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 3$ og $b = 2$.

b) Bestem værdien af udtrykket for $a = 6$ og $b = 0$.

c) Bestem værdien af udtrykket for $a = -1$ og $b = 2$.

Opgave 6

Et udtryk er givet ved: $4a^2 - 2a \cdot b + 5b$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 2$ og $b = 3$.

b) Bestem værdien af udtrykket for $a = 5$ og $b = 1$

c) Bestem værdien af udtrykket for $a = -1$ og $b = -2$.

Opgave 7

Et udtryk er givet ved: $a^3 - 4 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot b^2 - 5 \cdot a \cdot b \cdot c$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 1$, $b = 2$ og $c = 3$.

b) Bestem værdien af udtrykket for $a = 3$, $b = 5$ og $c = 0$

Opgave 8

Et udtryk er givet ved: $(a+b)^2 - a \cdot (2b+a) - b^2$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 1$ og $b = 2$.

b) Bestem værdien af udtrykket for $a = 5$ og $b = -1$.

Opgave 9

Et udtryk er givet ved: $(a+b) \cdot (a-b) + (2a+b) \cdot (a-3b)$

a) Bestem værdien af udtrykker for $a = 3$ og $b = 1$.

b) Bestem værdien af udtrykket for $a = 2$ og $b = -1$.

Opgave 10

Et udtryk er givet ved: $\frac{x^2-y^2}{x+y}$

a) Bestem værdien af udtrykket for $x = 10$ og $y = 5$.

b) Bestem værdien af udtrykket for $x = 7$ og $y = 2$.

c) Bestem værdien af udtrykket for $x = 3$ og $y = -4$.

d) Bestem værdien af udtrykket for $x = -1$ og $y = -8$.

Opgave 11

Et udtryk er givet ved: $\sqrt{(x+y)^2 - x \cdot (2y+x)}$

a) Bestem værdien af udtrykket for $x = 5$ og $y = 2$.

b) Bestem værdien af udtrykket for $x = 10$ og $y = 1$.

c) Bestem værdien af udtrykket for $x = 6$ og $y = 9$.

Regning med bogstaver

I opgave 11 sås at udtrykket $\sqrt{(x+y)^2 - x \cdot (2y+x)}$ for $x = 5$ og $y = 2$ gav 2, at det for $x = 10$ og $y = 1$ gav 1 og for $x = 6$ og $y = 9$ gav 9. Her kunne vi godt få den mistanke, at det i virkeligheden altid bare giver det tal vi sætter y til, uanset hvordan vi vælger x og y.

Hvis vi kunne vise at det forholder sig sådan (og det gør det når $y \geq 0$, mens at for $y < 0$ fås $-y$, altså 2 når $y = -2$), så slap vi for mange udregninger.

I opgave 10 sås at udtrykket $\frac{x^2-y^2}{x+y}$ for $x = 10$ og $y = 5$ samt for $x = 7$ og $y = 2$ gav 5, mens det for $x = 3$ og $y = -4$ samt $x = -1$ og $y = -8$ gav 7. Man kunne få det indtryk at det altid giver $x - y$ (hvilket faktisk er tilfældet). Kunne vi vise det, var udregningen meget lettere.

Derfor indfører vi bogstavregning, så vi kan reducere komplicerede udtryk til en simplere form, der er *lig med* det mere komplicerede. At bogstavudtrykkene er *lig med* hinanden betyder, at de altid har samme talværdi, for samme talinput.

Eksempel: $\boldsymbol{\frac{x^2-y^2}{x+y}} = \boldsymbol{x - y}$

For $x = 2$ og $y = 1$: $\boldsymbol{\frac{2^2-1^2}{2+1} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1}$ og $\boldsymbol{2 - 1 = 1}$

For $x = 10$ og $y = 3$: $\boldsymbol{\frac{10^2-3^2}{10+3} = \frac{100-9}{13} = \frac{91}{13} = 7}$ og $\boldsymbol{10 - 3 = 7}$

For $x = -5$ og $y = 8$: $\boldsymbol{\frac{(-5)^2-8^2}{(-5)+8} = \frac{25-64}{3} = \frac{-39}{3} = -13}$ og $\boldsymbol{(-5) - 8 = -13}$

Eksempel: $\sqrt{(x+y)^2 - x \cdot (2y+x)} = y$, hvor $y \geq 0$.

For $x = 2$ og $y = 1$: $\sqrt{(2+1)^2 - 2 \cdot (2 \cdot 1 + 2)} = \sqrt{3^2 - 2 \cdot 4} = \sqrt{9-8} = \sqrt{1} = 1 = y$

For $x = -1$ og $y = 10$: $\sqrt{(-1+10)^2 - (-1) \cdot \left(2 \cdot 10 + (-1)\right)} = \sqrt{9^2 + 19} = \sqrt{100} = 10 = y$

Man kan således altid *gøre prøve* på, om to bogstavudtryk er "lig med" hinanden, ved at vælge værdier for hvert indgående bogstav, sætte værdierne ind i hvert af de to udtryk, og se om resultaterne er forskellige. Hvis de er forskellige (og man har regnet rigtigt), så er udtrykkene ikke "lig med" hinanden. Hvis de er ens, kan de være det. Gælder det for 3-4 forskellige sæt af værdier, er det meget realistisk, at de to udtryk faktisk er lig hinanden.

Undgå at vælge 0 og 1 som værdier, og vælg også gerne værdier med en forskel på mindst 2.

Reduktion af ensbenævnte led

Når man arbejder med et bogstavudtryk, vil man ofte være interesseret i at det omskrives til en række led på formen:

$$[\text{tal}] \cdot [\text{bogstavudtryk}]$$

Bogstavudtrykket i et sådan led, kaldes for leddets *benævnelse*.

Eksempler på sådanne led kunne være: $5a$, $7b$, $2c$, $8a \cdot b$, $9b \cdot c^2$, $5abd^2$, $8a^2bc^3$, osv.

Her er leddenes benævnelser hhv. a, b, c, ab, bc^2, abd^2 og a^2bc^3. Bemærk at det ikke er væsentligt om vi benytter eksplicit gangetegn (men i princippet kunne man lavet ét symbol kaldet ab, som var forskelligt fra $a \cdot b$, og derfor er et eksplicit gangetegn typisk nødvendigt ved brug af et digitalt CAS-værktøj). Her skelnes ikke mellem abc og $a \cdot b \cdot c$.

Bemærk også, at a^2 er det samme som aa og c^3 det samme som ccc. Det gælder altså at benævnelsen $bc^2 = bcc$ og $a^2bc^3 = aabccc$.

To led siges at være *ensbenævnte*, hvis de har samme benævnelse. Det betyder at benævnelsen indeholder præcist samme symboler i type og antal, men ikke nødvendigvis i samme rækkefølge.

Det fås altså at $ab = ba$, at $a^2 = aa$, at $abc = cab$, at $c \cdot a \cdot c \cdot d = a \cdot c^2 \cdot d$, osv. Omvendt er a^2 og a ikke det samme, fordi den første benævnelse indeholder to a'er, mens den anden kun har ét.

Regneregel: *To led med samme benævnelse, kan lægges sammen.*

Det betyder at for tallene n og m samt benævnelsen X gælder: $m \cdot X \pm n \cdot X = (m \pm n) \cdot X$.

Eksempler: $4a + 2a = 6a$, $8b + 3b - 7b = 4b$, $10ab + 4ab = 14ab$, $2a^2 - 5a^2 = -3a^2$

I et bogstavudtryk med led med forskellige benævnelser, kan de ensbenævnte lægges sammen:

Eksempel: $9a + 4b - 6a - 5b = 3a - b$

Eksempel: $10a^2 - 8ab + 7a^2 - 5a^2b + 3ab = 17a^2 - 5ab - 5a^2b$

Eksempel: $7a + 3b - 2c + 5a - 9b + 2c = 12a - 6b$

Bemærk fra eksemplerne, at for leddet $1 \cdot X$ skrives blot benævnelsen X, samt at for leddet $0 \cdot X$ skrives leddet slet ikke. Således gælder at $1 \cdot ab^2 + 0 \cdot ab^2 = ab^2$.

Eksempel: $10a + 2b - 7a + 4b + a - 6b = 4a$

For $a = 2$ og $b = 4$ fås:
$10 \cdot 2 + 2 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 - 6 \cdot 4 = 20 + 8 - 14 + 16 + 2 - 24 = 8$
$4 \cdot 2 = 8$

Eksempel: $3x^2y + 8y - 4yx^2 - 7y = y - yx^2$

For $x = 2$ og $y = 4$ fås:
$3 \cdot 2^2 \cdot 4 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 2^2 - 7 \cdot 4 = 48 + 32 - 64 - 28 = -12$
$4 - 4 \cdot 2^2 = 4 - 16 = -12$

Opgave 12

Givet udtrykket: $8a + 5b + 2a - 3b - 6a$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 2$ og $b = 4$.

b) Reducér udtrykket mest muligt.

c) Gør prøve.

Opgave 13

Givet udtrykket: $2x - 5y + 3xy + 8y - 5x - xy$

a) Bestem værdien af udtrykket for $x = 2$ og $y = 4$.

b) Reducér udtrykket mest muligt.

c) Gør prøve.

Opgave 14

Givet udtrykket: $5p \cdot s + 8p - 6s + 3s \cdot p - 4p + 5s$

a) Bestem værdien af udtrykket for $p = 2$ og $s = 4$.

b) Reducér udtrykket mest muligt.

c) Gør prøve.

Opgave 15

Givet udtrykket: $a^2 + b^2 + 2a - 2b^2 - a^2 - a$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 2$ og $b = 4$.

b) Reducér udtrykket mest muligt.

c) Gør prøve.

Opgave 16

Givet udtrykket: $4x^2 + 2y - 3x \cdot y - y + x^2 + y \cdot x$

a) Bestem værdien af udtrykket for $x = 2$ og $y = 4$.

b) Reducér udtrykket mest muligt.

c) Gør prøve.

Opgave 17

Givet udtrykket: $4m - 2mn - 6m + 5nm + 2m$

a) Bestem værdien af udtrykket for $m = 2$ og n= 4.

b) Reducér udtrykket mest muligt.

c) Gør prøve.

Opgave 18

Givet udtrykket: $8x^2 - 4x - 3x^2 + 3x - 5x^2 + x$

a) Bestem værdien af udtrykket for $x = 2$, samt for $x = 4$.

b) Reducér udtrykket mest muligt.

c) Gør prøve.

Reduktion af parentesudtryk

Hvis et regneudtryk indeholder en parentes, vil man ofte med fordel kunne omskrive udtrykket, så det ikke indeholder en parentes. Den grundlæggende regneregel for dette kaldes *den distributive lov*, eller i dagligdagssprog for *reglen om at gange ind i parentes*.

Regneregel: *En faktor kan ganges ind i en parentes, med et eller flere led, ved at gange den sammen med hvert led:* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Eksempel: Givet regneudtrykket $8 + 3 \cdot (2 + 7)$

$$8 + 3 \cdot (2 + 7) = 8 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 8 + 6 + 21 = 35$$

I et udtryk hvor der kun indgår tal, vil det dog almindeligvis være bedre at bruge regnehierarkiet:

$$8 + 3 \cdot (2 + 7) = 8 + 3 \cdot 9 = 8 + 27 = 35$$

Eksempel: Givet regneudtrykket: $4a + 5 \cdot (b - 2a)$

$$4a + 5 \cdot (b - 2a) = 4a + 5 \cdot b - 5 \cdot 2a = 4a + 5b - 10a = 5b - 6a$$

Netop fordi der i parentesen ikke kun står egentlige tal, men også bogstaver, så kan vi kun omskrive udtrykket ved at gange ind i parentesen. Bemærk at vi herefter reducerer med princippet om ensbenævnte led.

Hvis der i regneudtryk optræder parenteser, uden et eksplicit tal foran, kan vi hæve parentesen ved at indsætte et eksplicit 1-tal:

$$a + (b - c) = a + 1 \cdot (b - c) = a + 1 \cdot b - 1 \cdot c = a + b - c$$

Det fører til regnereglen at en plusparentes altid bare kan "fjernes": $a + (b + c) = a + b + c$

$$a - (b + c) = a - 1 \cdot (b - c) = 1 - 1 \cdot b - (-1) \cdot c = a - b + c$$

Det fører til regnereglen, at en minus-parentes kan "fjernes", hvis man skifter fortegn på alle led i parentesen: $a - (b + c) = a - b - c$ $\qquad a - (b - c) = a - b + c$.

Eksempel: Givet regneudtrykket: $5a - (2a - 7b) + (6a - 4a)$

$$5a - (2a - 7b) + (6b - 4a) = 5a - 2a + 7b + 6b - 4a = 13b - a$$

Opgave 19

Givet udtrykket: $8a - 3 \cdot (2a + 4b) - 6b + 2 \cdot (a - b)$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 3$ og $b = 1$.

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Opgave 20

Givet udtrykket: $12x \cdot y + 6x \cdot (3 - 2y) - 10 \cdot (x + 2y)$

a) Bestem værdien af udtrykket for $x = 4$ og $y = 2$.

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Opgave 21

Givet udtrykket: $a^2 - 3a \cdot (a + b) + 2b \cdot (b + 2a)$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 1$ og $b = 5$.

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Opgave 22

Givet udtrykket: $4a \cdot (b + c) - 3b \cdot (c - a) + c \cdot (a + b)$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 1$, $b = 2$ og $c = 3$.

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Opgave 23

Givet udtrykket: $2p \cdot (p + 2q) - 5p \cdot (q - p) + 3 \cdot (q^2 - p^2)$

a) Bestem værdien af udtrykket for $p = 3$ og $q = 2$.

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Gange parenteser sammen

Hvis vi i et bogstavudtryk har to parenteser gange sammen, kan vi benytte reglen om at gange ind i parentes to gange, efter følgende model:

$$(a+b)\cdot(c+d)=(a+b)\cdot c+(a+b)\cdot d=a\cdot c+b\cdot c+a\cdot d+b\cdot d$$

Ofte formuleres dette som regnereglen: Man ganger to parenteser sammen, ved at gange hvert led i den ene parentes, med hvert led i den anden parentes.

Eksempel:

$$\boldsymbol{(4a+b)\cdot(2b-a)=4a\cdot 2b-4a\cdot a+b\cdot 2b-a\cdot b=}$$
$$8ab-4a^2+2b^2-ab=2b^2-4a^2+7ab$$

Bemærk hvordan reglen benyttes i den første omskrivning, hvorefter regnereglen for reduktion af ensbenævnte led kan anvendes.

Opgave 24

Givet udtrykket: $2a^2+(2a+b)\cdot(a-5b)-3a\cdot(a-2b)$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a=6$ og $b=1$

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Opgave 25

Givet udtrykket: $8x\cdot y+(5x-2y)\cdot(x+3y)-(4x+y)\cdot(y-2x)$

a) Bestem værdien af udtrykket for $x=1$ og $y=2$

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve-

Opgave 26

Givet udtrykket: $4\cdot(a^2-b^2)+(3a-b)\cdot(4b-2a)-(a+b)\cdot(b-a)$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a=3$ og $b=2$.

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Kvadratsætninger

Af særlig interesse er kvadrerede parenteser, med flere led. Især kvadratet på en parentes med to led får en særlig opmærksomhed:

$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + b^2 + 2a\cdot b$

$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a - b\cdot(-b) = a^2 + b^2 - 2a\cdot b$

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - a\cdot b + b\cdot a + b\cdot(-b) = a^2 - b^2$

Disse tre resultater kaldes for de tre *kvadratsætninger*, og er så vigtige, at de står i formelsamlingen:

Kvadratsætninger

(15)	$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a\cdot b$
(16)	$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2a\cdot b$
(17)	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ved regning med led der består af flere faktorer, kan vi få brug for en enkelt *potensregneregel*:

$$(a\cdot b)^2 = (a\cdot b)\cdot(a\cdot b) = a\cdot b\cdot a\cdot b = a\cdot a\cdot b\cdot b = a^2\cdot b^2$$

Denne står mere generelt i formelsamlingen: (21) $(a\cdot b)^r = a^r\cdot b^r$

Eksempel: $(c+d)^2 = c^2 + d^2 + 2c\cdot d$

Eksempel: $(x-4)\cdot(x+4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$

Eksempel: $(2a+b)^2 = (2a)^2 + b^2 + 2\cdot 2a\cdot b = 2^2\cdot a^2 + b^2 + 4a\cdot b = 4a^2 + b^2 + 4a\cdot b$

Eksempel: $(3x-2y)^2 = (3x)^2 + (2y)^2 - 2\cdot 3x\cdot 2y = 9x^2 + 4y^2 - 12x\cdot y$

Eksempel: $(a+b)^2 - a\cdot(a+2b) = a^2 + b^2 + 2a\cdot b - a^2 - 2a\cdot b = b^2$

Eksempel: $(a-2b)^2 + (a-b)\cdot(2a+b) = a^2 + 4b^2 - 4ab + 2a^2 + a\cdot b - 2a\cdot b - b^2 =$ $3a^2 + 3b^2 - a\cdot b$

Opgave 27

Givet udtrykket: $(a+b)^2 - 2a \cdot (a+b) - b^2$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 1$ og $b = 3$.

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Opgave 28

Givet udtrykket: $(a-b)^2 + (a+b)(a-b) - a \cdot (a+b)$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 3$ og $b = 1$.

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Opgave 29

Givet udtrykket: $(2a+b)^2 - 3a \cdot (a+b) - b \cdot (a+b)$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 2$ og $b = 4$

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Opgave 30

Givet udtrykket: $(x-3y)^2 - (x+2y) \cdot (2x-3y) - x \cdot (2x-5y)$

a) Bestem værdien af udtrykket for $x = 2$ og $y = 3$.

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Opgave 31

Givet udtrykket: $(2a+b) \cdot (2a-b) - (a+b)^2 - 2a \cdot (a+2b)$

a) Reducér udtrykket mest muligt.

Reduktion af brøkudtryk

I et brøkudtryk $\frac{a}{b}$ kalder vi det der står over brøkstregen for ”tælleren”, og det som står under for ”nævneren”. Nævneren så at sige ”navngiver” brøken (f.eks tredjedele), mens tælleren ”tæller” hvor mange af den navngivne brøk vi har (f.els. to tredjedele).

Brøkstregen er en måde at skrive *division* på. Således gælder at $\frac{a \cdot k}{k} = a$ og $\frac{a}{k} \cdot k = a$, fordi division og gange er hinandens omvendte regnearter.

Vi kan forkorte en brøk, ved at dividere tæller og nævner med samme tal k. Hvis k er faktor i både tæller og nævner, fås altså brøken på en mere simpel form.

Regneregel: *En brøk forkortes ved at dividere tæller og nævner med samme tal:*

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{\frac{a \cdot k}{k}}{\frac{b \cdot k}{k}} = \frac{a}{b}$$

Eksempel:

$$\frac{63}{15} = \frac{\frac{63}{3}}{\frac{15}{3}} = \frac{21}{5}$$

Eksempel:

$$\frac{6a^2 \cdot b}{2a \cdot b} = \frac{3 \cdot 2a \cdot a \cdot b}{2a \cdot b} = 3a$$

Hvis tælleren i en brøk indeholder flere led, skal hvert led deles med nævneren. Hvis nævneren indeholder flere led, er det hele nævneren der divideres op i hvert led i tælleren:

$$\frac{a + b}{c + d} = \frac{a}{c + d} + \frac{b}{c + d}$$

Eksempel:

$$\frac{4a^2 + 6a \cdot b}{2a} = \frac{4a^2}{2a} + \frac{6a \cdot b}{2a} = \frac{2 \cdot 2a \cdot a}{2a} + \frac{3 \cdot 2a \cdot b}{2a} = 2a + 3b$$

Opgave 32

Givet udtrykket:

$$\frac{2a^2 - 10a \cdot b}{2a}$$

a) Udregn værdien af udtrykket for $a = 10$ og $b = 1$, og reducér det mest muligt. Gør prøve.

Opgave 33

Givet udtrykket:

$$\frac{6a^2 + 3a \cdot b - 9a}{3a}$$

a) Udregn værdien af udtrykket for $a = 2$ og $b = 4$, og reducér det mest muligt. Gør prøve.

Opgave 34

Givet udtrykket:

$$\frac{3a \cdot (2a + 6) - 2a \cdot (3a + 12b)}{6a}$$

a) Udregn værdien af udtrykket for $a = 2$ og $b = 1$, og reducér det mest muligt. Gør prøve.

Opgave 35

Givet udtrykket:

$$\frac{z \cdot (4x + 2y)^2}{4z}$$

a) Udregn værdien af udtrykket for $x = 3$ og $y = 2$ og $z = 1$, og reducér det mest muligt. Gør prøve.

Faktorisering af udtryk

Når en brøk skal reduceres, kan man med fordel faktorisere tæller og/eller nævner. At faktorisere betyder *at udtryk med flere led, skrives om til et udtryk med ét led og flere faktorer.*

Man kan faktorisere et udtryk ved at anvende det modsatte af at *gange ind i parentes*, som er at ***sætte uden for parentes***. Dette kan man gøre, hvis der i et udtryk med flere led, optræder samme faktor i hvert led. Da kan denne faktor "sættes uden for en parentes":

Regneregel: *En faktor fælles for flere led, kan sættes uden for parentes:*

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Eksempel: $4 \cdot x + 3 \cdot x = x \cdot (4 + 3)$

Eksempel: $a \cdot b^2 + 5b = b \cdot (a \cdot b + 5)$

Eksempel: $\frac{2a \cdot (6a + 8a^2)}{4a^2} = \frac{2a \cdot (2a \cdot 3 + 2a \cdot 4a)}{4a^2} = \frac{2a \cdot 2a \cdot (3 + 4a)}{4a^2} = \frac{4a^2 \cdot (3 + 4a)}{4a^2} = 3 + 4a$

Derudover kan vi anvende de tre kvadratsætninger baglæns:

$$a^2 + b^2 + 2a \cdot b = (a + b)^2$$

$$a^2 + b^2 - 2a \cdot b = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Den tredje kvadratsætning kan her også skrives: $a - b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \cdot \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$

Det ses her, at ethvert "minustykke" (mellem ikke-negative tal) kan faktoriseres.

Eksempel: $4a^2 + b^2 - 4a \cdot b = (2a)^2 + b^2 - 2 \cdot (2a) \cdot b = (2a - b)^2$

Eksempel: $x^2 + 9y^2 + 6x \cdot y = x^2 + (3y)^2 + 2 \cdot x \cdot 3y = (x + 3y)^2$

Eksempel: $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$

Eksempel: $x^2 - 25 = \left(\sqrt{x^2} + \sqrt{25}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2} - \sqrt{25}\right) = (x + 5) \cdot (x - 5)$

Eksempel: $a^2 + 2b \cdot (b - a) - b^2 = a^2 + 2b^2 - 2a \cdot b - b^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b = (a - b)^2$

Opgave 36

Givet udtrykket:

$$\frac{8a^2 + 6a}{a \cdot (4a + 10)}$$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 2$.

b) Faktorisér tæller og nævner, og reducér udtrykket mest muligt. Gør prøve.

Opgave 37

Givet udtrykket:

$$\frac{2ab - 6a^2}{2a}$$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 1$ og $b = 3$.

b) Faktorisér tæller og nævner, og reducér mest muligt. Gør prøve.

Opgave 38

Givet udtrykket:

$$\frac{3a \cdot (a + b) - 6a^2}{3 \cdot (a + b) - 3b}$$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 1$ og $b = 3$.

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Opgave 39

Givet udtrykket:

$$\frac{2a \cdot (a + b) - (a^2 - b^2)}{a + b}$$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 1$ og $b = 3$

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Opgave 40

Givet udtrykket:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b}$$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 4$ og $b = 2$.

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Opgave 41

Givet udtrykket

$$\frac{4a \cdot (a - b) + b^2}{2a - b}$$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 5$ og $b = 2$.

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Opgave 42

Givet udtrykket

$$\frac{2a^2 - 2b \cdot (2a - b)}{a - b}$$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 3$ og $b = 1$.

b) Reducér udtrykket mest muligt, og gør prøve.

Opgave 43

Givet udtrykket

$$\frac{x^2 - 25}{x + 5}$$

a) Bestem værdien af udtrykket for $x = 2$, og reducér udtrykket mest muligt. Gør prøve

Opgave 44

Givet udtrykket

$$\frac{6a \cdot (a + 2b) + 2 \cdot (4{,}5b^2 - a^2)}{2a + 3b}$$

a) Bestem værdien af udtrykket for $a = 5$ og $b = 2$, og reducér mest muligt. Gør prøve.

Løsning af ligninger

En ligning er et udtryk, som indeholder et lighedstegn. Ligningen kan endvidere indeholde ét eller flere bogstaver, som kaldes for *ubekendte.* En ligning med mindst to ubekendte kaldes en *formel*.

Eksempel: $10x - 2 = 5x + 33$

Eksempel: $x^2 - 10x + 21 = 0$

Ofte indeholder en ligning netop én ubekendt, som vi ønsker at bestemme en eller flere værdier for. En sådan værdi kaldes for *en løsning*, og alle værdierne kaldes til sammen for *ligningens løsning*.

Eksempel: $x = 7$ er en løsning til ligningen $10x - 2 = 5x + 33$, fordi:
$10 \cdot 7 - 2 = 68$ og $5 \cdot 7 + 33 = 35 + 33 = 68$
Ved indsættelse ses det, at $x = 7$ giver udtrykkene på begge sider samme værdi.

Eksempel: $x = 7$ er en løsning til ligningen $x^2 - 10x + 21$ fordi:
$7^2 - 10 \cdot 7 + 21 = 49 - 70 + 21 = 0$
$x = 3$ er også en løsning, fordi: $3^2 - 10 \cdot 3 + 21 = 9 - 30 + 21 = 0$
I alt siger vi, at ligningen $x^2 - 10x + 21 = 0$ har løsningen $\boldsymbol{x = 3}$ **eller** $\boldsymbol{x = 7}$

For at finde løsningen til en ligning, kaldet *at løse* ligningen, gælder grundlæggende to principper:

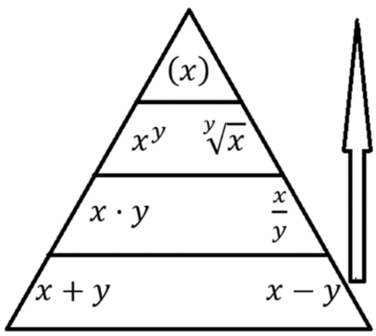
Regneregel: *For at løse en ligning må vi gøre to ting:*

1. Vi kan udføre tal- og bogstavregning på én af siderne (eventuelt dem begge).

2. Vi kan udføre enhver regneoperation, blot vi udfører den samme på begge sider samtidig. (det er dog ikke tilladt at gange eller opløfte begge sider i ligningen med tallet 0).

Når vi løser ligninger udnytter vi at hver af de seks regnearter parvist er hinandens omvendte. Dette kan bruges til at omskrive ligningen, indtil vi har fundet en løsning.

Når vi gør dette, så vil vi ofte med fordel kunne tænke på at bruge regnehierarkiet ”nede fra og op”, frem for ”oppefra og ned”, som vi gør det ved regning med tal.



Særligt ved anvendelse af *rod* gælder:
Hvis n er et *ulige* tal, så vil $x^n = a$ have løsningen $x = \sqrt[n]{a}$.
Hvis n er et *lige* tal og $a \geq 0$, så vil $x^n = a$ have løsningen $x = \pm\sqrt[n]{a}$, og for $a < 0$ ingen løsning.

Eksempel:	Løs ligningen	$10x - 2 = 5x + 33$
	Læg 2 til på begge sider:	$10x = 5x + 35$
	Træk $5x$ fra på begge sider:	$5x = 35$
	Dividér med 5 på begge sider:	$x = 7$

Hermed er x isoleret på den ene side, og løsningen er $x = 7$.

Eksempel:	Løs ligningen	$4 \cdot x^3 - 18 = 14$
	Læg 18 til på begge sider:	$4 \cdot x^3 = 32$
	Dividér med 4 på begge sider:	$x^3 = 8$
	Omskriv med 3.-rod	$x = \sqrt[3]{8}$
	Løsning fundet:	$x = 2$

Eksempel:	Løs ligningen	$x^2 - 10x + 21 = 0$
	Træk 21 fra på begge sider:	$x^2 - 10x = -21$
	Omskriv venstre side:	$x^2 - 2 \cdot 5x = -21$
	Læg 5^2 til på begge sider:	$x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 = -21 + 5^2$
	Omskriv venstre side:	$(x - 5)^2 = 4$
	Omskriv med 2.-rod:	$x - 5 = \pm\sqrt{4}$
	Udregn højre side:	$x - 5 = \pm 2$
	Læg 5 til på begge sider:	$x = \pm 2 + 5$
	Opdel højre side:	$x = -2 + 5$ eller $x = 2 + 5$
	Løsning fundet:	$x = 3$ eller $x = 5$.

Opgave 45:

Løs ligningen: $3 \cdot (x-2) + 7 = 4x - 11$

Opgave 46:

Løs ligningen: $2 \cdot x^3 - 15 = 39$

Opgave 47:

Løs ligningen: $\dfrac{91}{2x-3} = 7$

Opgave 48:

Løs ligningen: $x^2 = 25$

Opgave 49

Løs ligningen: $x^5 = 32$

Opgave 50:

Løs ligningen: $2 \cdot x^4 - 51 = 111$

Opgave 51:

Løs ligningen: $(x-4)^2 = 100$

Opgave 52:

Løs ligningen: $x^2 - 8x - 20 = 0$

Løsning af andengradsligninger

Som vist flere steder i foregående afsnit, har vi en særlig interesse i ligninger på formen:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Vi udvikler derfor en generel løsningsmetode til denne:

Gang med $4a$ på begge sider:	$4a^2 \cdot x^2 + 4ab \cdot x + 4ac = 0$
Træk $4ac$ fra på begge sider:	$4a^2 \cdot x^2 + 4ab \cdot x = -4ac$
Omskriv venstre side:	$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b = -4ac$
Læg b^2 til på begge sider:	$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac$
Venstre side omskrives med 1. kvadratsætning:	$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
Vi beslutter nu: $d = b^2 - 4ac$	$(2ax + b)^2 = d$
For $d \geq 0$ fås med 2.rod nu:	$2ax + b = \pm\sqrt{d}$
Der trækkes b fra på begges ider:	$2ax = -b \pm \sqrt{d}$
Der divideres med a på begge sider:	$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

Størrelsen $d = b^2 - 4ac$ kaldes for andengradsligningens *diskriminant*.

Det ses, at for $d < 0$ har ligningen *ingen* løsninger, da $(2ax + b)^2$ ikke kan være negativ.

For $d = 0$ fås 1 løsning: $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$

For $d > 0$ fås 2 løsninger: $x = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$ eller $x = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$

Eksempel: Løs ligningen $x^2 - 4x - 12 = 0$

Koefficienter aflæses: $a = 1$, $b = -4$ og $c = -12$.
Diskriminant beregnes: $d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64$
Løsninger bestemmes: $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 8}{2} = 2 \pm 4$.
Løsning: $x = -2$ eller $x = 6$

Opgave 53

En andengradsligning er givet ved: $2x^2 + 10x + 8 = 0$

a) Aflæs koefficienterne a, b og c.

b) Beregn diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ og forklar hvor mange løsninger ligningen har.

c) Bestem eventuelle løsninger med løsningsformlen: $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$.

Opgave 54

En andengradsligning er givet ved: $x^2 - 5x + 6 = 0$

a) Aflæs koefficienterne a, b og c.

b) Beregn diskriminanten d, og forklar hvor mange løsninger ligningen har.

c) Bestem eventuelle løsninger til ligningen.

Opgave 55

En andengradsligning er givet ved: $2x^2 + 4x - 3 = 0$

a) Aflæs koefficienterne a, b og c

b) Beregn diskriminanten d, og forklar hvor mange løsninger ligningen har.

c) Bestem eventuelle løsninger til ligningen.

Opgave 56

En andengradsligning er givet ved: $\frac{1}{2} \cdot x^2 + 2x + 4 = 0$

a) Aflæs koefficienterne a, b og c, og beregn diskriminanten d.

b) Bestem eventuelle løsninger til ligningen.

Opgave 57
Løs ligningen: $x^2 - 3x + 2 = 0$

Opgave 58
Løs ligningen: $x^2 + 10x - 16 = 0$

Opgave 59
Løs ligningen: $x^2 - 7x = 0$

Opgave 60
Løs ligningen: $3x^2 - 9x + 10 = 0$

Opgave 61
Løs ligningen: $x^2 - 25 = 0$

Opgave 62

Løs ligningen: $\frac{1}{2} \cdot x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$

Opgave 63
Løs ligningen: $x^2 - 5x - 24 = 0$

Opgave 64
Løs ligningen: $x^2 + 100 = 0$

Opgave 65
Løs ligningen: $3x^2 - 9x + 12 = 0$

Opgave 66
Løs ligningen: $x^2 - 20x + 19 = 0$

Opgave 67
Løs ligningen: $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (Hint: Sæt $u = x^2$, og løs for u).

Løsning af ligninger med nulreglen

Nulreglen siger:

Nulreglen: *Et produkt er 0 hvis og kun hvis mindst én af faktorerne er 0.*

$$a \cdot b = 0 \textit{ hvis og kun hvis } a = 0 \textit{ eller } b = 0$$

Hvis en ligning har form af et produkt, kan man splitte op i en ligning hvor hver faktor sættes lig 0, og løses som en selvstændig ligning.

Eksempel: $(x-2) \cdot (x+4) \cdot (x^2-9) = 0$

$x - 2 = 0$ eller $x + 4 = 0$ eller $x^2 - 9 = 0$

$x = 2$ eller $x = -4$ eller $x^2 = 9$

$x = 2$ eller $x = -4$ eller $x = -3$ eller $x = 3$

Opgave 68

Løs ligningen: $(x-3) \cdot (x-8) \cdot (x+1) = 0$

Opgave 69

Løs ligningen: $(x^2-4) \cdot (x+5) = 0$

Opgave 70

Løs ligningen: $(2x+6) \cdot (x-4) = 0$

Opgave 71

Løs ligningen: $(x-11)^2 \cdot (x^2+1) = 0$

Opgave 72

Løs ligningen: $(x^2-4x+3) \cdot (x-6) = 0$

Faktorisering af andengradsudtryk

Et andengradsudtryk (venstre side af andengradsligningen) kan faktoriseres via løsningerne:

Faktorisering: *Hvis andengradsligningen* $ax^2 + bx + c = 0$ *har løsning* $x = x_1$ *eller* $x = x_2$ *fås*

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Eksempel: Givet andengradsligningen: $x^2 - 7x + 12 = 0$

Da $a = 1$, $b = -7$ og $c = 12$ fås $d = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$

Løsningen er da: $x = \frac{-(-7)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{7\pm 1}{2}$ det vil sige $x = 3$ eller $x = 4$.

Dermed gælder: $x^2 - 7x + 12 = (x - 3) \cdot (x - 4)$

Bevis: $(x - 3) \cdot (x - 4) = x^2 - 3x - 4x - 3 \cdot (-4) = x^2 - 7x + 12$.

Eksempel: Andengradsligningen $x^2 - 3x + 10 = 0$ har løsning $x = -2$ eller $x = 5$.

Dermed gælder: $x^2 - 3x + 10 = \big(x - (-2)\big) \cdot (x - 5) = (x + 2) \cdot (x - 5)$

Opgave 73

a) Løs andengradsligningen $x^2 - 9x + 20 = 0$

b) Faktorisér udtrykket $x^2 - 9x + 20$

Opgave 74

Givet udtrykket $\dfrac{x^2 - 5x - 6}{x + 1}$

a) Løs ligningen $x^2 - 5x + 6 = 0$, faktorisér tælleren og reducér udtrykket mest muligt.

Opgave 75

Reducer følgende udtryk mest muligt: $\dfrac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 3x - 28}$

Opgave 76

Reducér følgende udtryk mest muligt: $\dfrac{x^2 + 3x - 54}{x^2 - 81}$