

Beviset – matematikkens centrale metode

KBJ, januar 2020

»Mange videnskaber er karakteriseret ved de objekter de omhandler: Botanik handler om planter og astronomi om himmellegger. Matematik er derimod karakteriseret ved sin metode. Det karakteristiske ved matematikken er at dens resultater kræver beviser. Naturligvis argumenterer man også i andre videnskaber, men i matematik er argumenterne eller beviserne mere stringente (dvs. strenge, præcise) end i andre videnskaber.«

Jesper Lützen og Ian Kiming (2008)

Citatet stammer fra teksten *Matematisk Metode*¹ skrevet af matematikerne Jesper Lützen og Ian Kiming, til brug ved den indledende undervisning på matematikstudiet på Københavns Universitet. Man kan godt diskutere det præcise indhold af citatet, men det understreger alligevel hvor centralt *beviset* står som metode inden for matematikfaget.

Ordet ”bevis” kendes fra hverdagsproget. Hvis en person står tiltalt for et drab og personen var tilstede da drabet blev begået, har sat sine fingeraftryk på drabsvåbnet, har en god grund til at ville ofret det ondt og måske har tilstået drabet, så vil retten finde at *beviserne* er tilstrækkelige til at erklære personen skyldig, og medierne vil sige at retten fandt det *bevist* at personen var skyldig.

Men sikker bliver vi aldrig. Måske ønskede personen at tage skylden, frem for den rigtige gerningsmand og fik det til at se ud som om personen selv var skyldig. Derfor er ”tilståelse” ikke et tilstrækkeligt bevis til at blive dømt for mord. I hverdagsprog er et ”bevis” altså noget der sandsynliggør en konklusion – men sikker bliver vi aldrig helt.

Sådan er det ikke i matematik. Et *bevis* er i matematik et argument, der er så stærkt, at der ikke længere er noget at diskutere. Når en matematisk *sætning* er bevist, vil ingen matematiker længere stille spørgsmålstejn ved at den gælder. Højest kan det diskuteres, om beviset er udført korrekt.

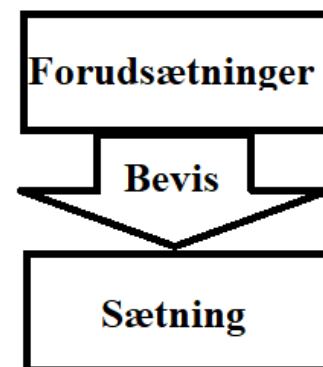
Sætninger er teoretiske udsagn om matematiske objekter (f.eks. tal, figurer, funktioner og lignende). Matematikkens teori er opbygget af sætninger og *beviset* er således den væsentligste *metode* vi har i matematik, til at begrunde at vores teori er korrekt. Det kan til dels sammenlignes med centrale metoder i andre fag, f.eks. eksperiment og observation i naturfagene, spørgeskema og interview i samfundsfagene og tekstanalyse i sprogfagene. Og alligevel er *beviset* noget helt særligt.

¹ Teksten er læsværdig for interesserede (og dygtige) gymnasieelever og kan (14/1-2020) hentes gratis her: <http://web.math.ku.dk/noter/filer/matm09.pdf>.

Hvad er et *matematisk bevis*?

Det *matematiske bevis* hænger uløseligt sammen med den *matematiske sætning*. Beviset er det argument der opstilles, for at sikre at sætningen er korrekt.

Beviset kommer ikke ud af den blå luft, men baserer sig derimod på en eller flere "sandheder" som går forud. Fordi de går forud for den sætning der skal bevises, er der tale om *forud-sætninger*. Et bevis er altså det der gør at man fra *forudsætningerne* kan sige, at også *sætningen* gælder. Men sætningen gælder netop kun, fordi *forudsætningerne* gør det.



Men hvad er *forudsætninger* så? Vi vil her skelne mellem fire typer af forudsætninger:

1. *Sætninger*, som allerede tidligere er blevet bevist. Så snart vi har bevist en sætning, er den altså klar til at være forudsætning for andre sætninger.
2. *Definitioner*, som er en præcis afgrænsning af hvad indholdet i et bestemt ord er. Vi har f.eks. en definition af hvad en cirkel er, som kan indgå i sætninger der omhandler cirkler.
3. *Aksiomer*, som er en slags "sætninger", som er så indlysende, at vi har besluttet at lade dem være sande. F.eks. at man altid kan tegne et linjestykke mellem to punkter.
4. *Antagelser*, som er bestemte forhold der er gældende i beviset. F.eks. er det en antagelse for beviset for topunktsformlen, at vi kender to punkter som en linje skal gå igennem.

Pythagoras sætning – et eksempel

Den måske mest berømte matematiske sætning er *Pythagoras sætning*, som omhandler retvinklede trekanter og som siger, at hvis man ud af hver side i en retvinklet trekant danner et kvadrat, så vil de to mindst kvadrater til sammen fylde det samme, som det største.

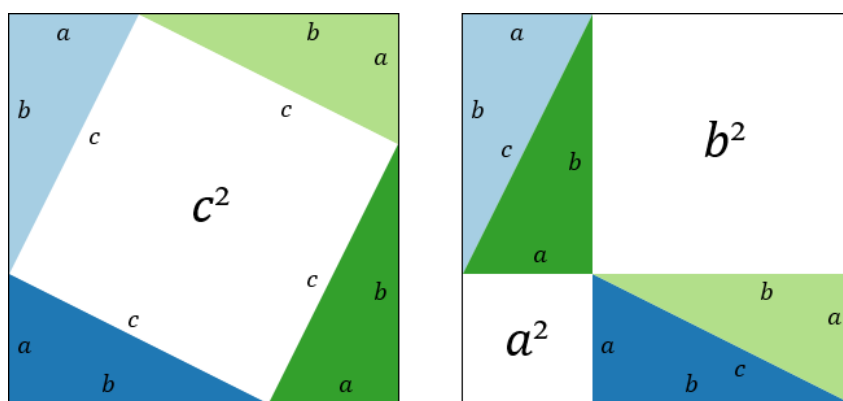
Ofte kalder vi længderne af de to korteste sider (kateterne) i en retvinklet trekant for a og b , mens længden af den længste side (hypotenusen) betegnes c . Da arealet af et kvadrat med siden a er a^2 , arealet af et kvadrat med siden b er b^2 og arealet af et kvadrat med siden c er c^2 , siger Pythagoras sætning er der gælder: $a^2 + b^2 = c^2$.

I forståelsen af denne sætning er det vigtigt at huske, at de 8 tegn til sidst i forgående afsnit ikke *alene* kan kaldes "Pythagoras sætning". Det er helt nødvendigt at præcisere, at a og b netop repræsenterer længder på kateter og c længden af hypotenusen i samme *retvinklede* trekant.

Men hvordan ved vi at sætningen er sand? En person fra natur- og samfundsfagene ville måske stille sig tilfreds med de ufatteligt mange trekanter der gennem tidens løb har vist altid at opfylde sætningen netop når de var retvinklede, mens de aldrig gjorde det, når de ikke var retvinklede. Men i matematik er selv nok så mange eksempler ikke nok til, at vi slutter at noget gælder generelt.

Men vi ved sætningen gælder, fordi den er bevist. Pythagoras levede for ca. 2500 år siden i antikens Grækenland, men man kender ikke til et bevis han har lavet. Vi ved også at man kendte til ideen i sætningen længe før han levede. Det første bevis for sætningen kender vi fra en lidt yngre græker, nemlig Euklid, der et par hundrede år efter Pythagoras udgav den første stringente præsentation af matematisk teori, kaldet *Elementerne*. Her findes det ældste kendte bevis for sætningen.

Euklids bevis er omfattende og kan undersøges i en senere opgave. Et mere simpelt bevis vil blive præsenteret her. Lad os forestille os en retvinklet trekant hvor kateterne har længderne a og b , mens hypotenusen har længden c . Lad os lægge fire eksemplarer af denne samme trekant i to forskellige mønstre, som kan ses på figuren herunder²:

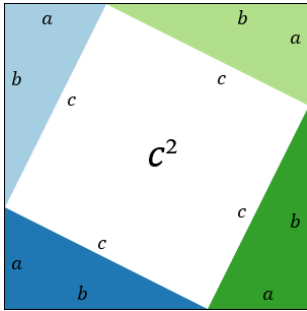


Figuren til venstre er oplagt et kvadrat med sidelængden $a + b$ (alle fire sider er dannet ved at lægge kateter med længden hhv. a og b i forlængelse af hinanden og den rette vinkel er lagt i hjørnet af firkanten – den er således et kvadrat). Figuren til højre er ligeledes et kvadrat med sidelængden $a + b$ (undersøg selv hvorfor). De to firkanter er altså lige store.

Hvis vi fra kvadratet til venstre fjerner de fire trekanter, bliver der tilbage et kvadrat med sidelængden c og arealet c^2 . Hvis vi fjerner de fire trekanter fra kvadratet til højre, bliver der tilbage to kvadrater med sidelængderne a og b og arealerne a^2 og b^2 . Da vi har fjernet de samme fire trekanter fra to lige store kvadrater, må det tilbageværende være lige stort. Altså gælder:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

² Figuren er lånt fra internetleksikonet Wikipedia, hvor mange andre eksempler på beviser også kan læses, sammen med en kort historisk præsentation af sætningens oprindelse: https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_theorem



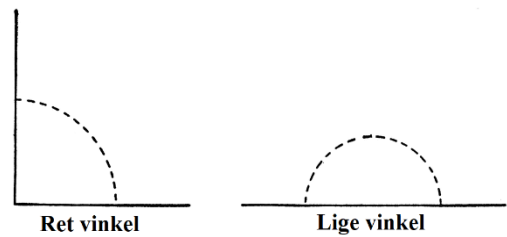
Beviset er ikke godt nok. Vi har eksempelvis påstået om figuren til venstre her, at den hvide figur er et kvadrat. Men hvordan ved vi det?

Øvelse 1:

Opstil en argumentation for, hvorfor den hvide figur er et kvadrat. Husk at et kvadrat per definition er en firkant, hvor alle sider er lige lange og alle vinkler er rette.

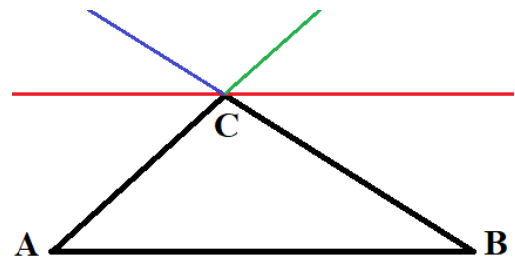
Vinkelsum i trekant

Et centralt argument i øvelse 1 er, at de tre vinkler i en trekant til sammen giver 180° . Eller mere generelt udtrykt, at de til sammen giver "en lige vinkel" svarende til "to rette vinkler". Men hvordan ved vi egentlig at det er korrekt?



Øvelse 2:

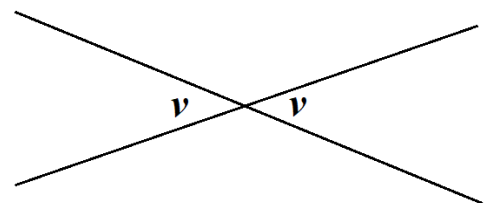
For en vilkårlig trekant ABC tegner vi gennem C en linje (rød) parallel med siden AB. Ud fra C tegner vi endvidere forlængelsen af siden AC (grøn) og forlængelsen af siden BC (blå).



- a) Argumentér ud fra figuren for, at de tre vinkler A, B og C til sammen må danne en lige vinkel.
- b) Lav en liste over antagelser du har måtte gøre, for at gennemføre din argumentation.

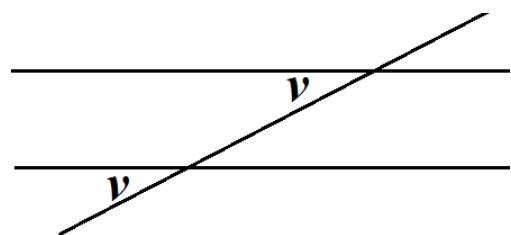
To vigtige sætninger om vinkler

Hvis to linjer skærer hinanden, vil vinkler over for hinanden (kaldet "topvinkler") være lige store.



Øvelse 3: Vis at to topvinkler er lige store.

En linje der skærer to parallelle linjer, møder de to parallelle linjer med samme vinkel.



Øvelse 4:

Vis at en linje møder to parallelle linjer med samme vinkel.

Aksiomer og definitioner

Beviset for Pythagoras sætning bygger altså på andre sætninger, som også må bevises. Og disse sætninger bygger igen på sætninger, som også må bevises. Det kunne se ud som om, at vi får en uendelig følge af nye sætninger der hele tiden må bevises. For at undgå dette, indfører vi simple sætninger som vi beslutter på forhånd er sande. Disse kalder vi aksiomer.

Overvej f.eks. hvad der i øvelse 2 gav os lov til at tegne en linje gennem C, som var parallel med AB eller hvad der gav os lov til at forlænge siderne AC og BC. Kan man godt bare gøre dette? Svaret gav Euklid ved at opstille fem grundlæggende aksiomer for geometrien:

1. To punkter kan forbindes med et linjestykke.
2. Et linjestykke kan forlænges uendeligt langt.
3. Man kan tegne en cirkel med ethvert punkt som centrum og enhver længde som radius.
4. Alle rette vinkler er lige store.
5. Hvis en ret linje skærer to andre rette linjer og de indvendige vinkler på samme side til sammen er mindre end to rette vinkler, så vil de to linjer mødes på denne side hvis de forlænges.

De fem aksiomer (eller *postulater* som de også kaldes) findes i forskellige formuleringer og de fem der står her er søgt formuleret i moderne sprog. Det ses dog ret direkte at det er aksiom nummer 2 der i øvelser 2 giver os lov til at af forlænge siderne AC og BC.

Af aksiomerne følger sætning 31 i Euklids 1. bog, som siger at ”gennem et givet punkt kan der trækkes en ret linje, parallel med en given ret linje”. Dette giver os lov til i øvelse 2 at tegne en linje gennem C parallel med AB. Beviset for sætning 31 bygger på flere af de 30 forudgående sætninger.

Kan man så bare opfinde aksiomer, når man mangler en begrundelse? Nej! Det imponerende ved Euklids fem postulater er, at hele den klassiske geometri kan udledes af netop disse fem aksiomer. Vi behøver ikke andre.

Ud over de fem aksiomer opstiller Euklid også 23 såkaldte *definitioner*, som er nogle grundlæggende beslutninger om hvilke objekter forskellige begreber dækker over.

Et eksempel er de to første definitioner: ”Et punkt er det, der ikke kan deles” og ”En linje er en længde uden bredde”. Et andet eksempel er at ”En cirkel er en plan figur bestående af en linje (kaldet periferien), således at alle linjestykker trukket fra et punkt i cirklen til linjen (periferien) er indbyrdes lige store”. I den efterfølgende definition navngives omtalte punkt ”centrum i cirklen”.

Endeligt defineres at ”To rette linjer i samme plan er parallelle, hvis de når de forlænges uendeligt til begge sider aldrig mødes”. Denne definition kan måske hjælpe til at besvare øvelse 4.

Da matematik ikke kun handler om geometri, findes der også andre aksiomer. Inden for tallene opstillede den italienske matematiker Giuseppe Peano fire aksiomer for de naturlige tal, som bygger på en *efterfølgerfunktion* S , der til hvert tal udpeger det næste tal i rækken. F.eks. gælder $S(7) = 8$:

1. Der findes mindst ét naturligt tal, som vi kalder for 1.
2. Tallet 1 kaldes starttallet og er ikke efterfølger til noget tal.
3. Hvis to tal n og m er forskellige, er deres efterfølgere $S(n)$ og $S(m)$ også forskellige.
4. En mængde der indeholder 1 samt efterfølgeren til alle tal i mængden, er de naturlige tal.

Det centrale her er beskrivelsen af de naturlige tal som en ”uendeligt” lang perlesnor, hvor der er én første perle (aksiom 1 og 2) og herefter en uendelig følge af perler på række (aksiom 3 siger netop at en perle ikke kan komme efter to forskellige perler). Navngivningen af tallene som 1,2,3,4, ... er her blot en konvention om hvad vi kalder de enkelte perler på snoren.

Efterfølgerfunktionen kan nu bruges flere gange på samme tal, f.eks. tre gange: $S(S(S(n)))$. Lad os for nemheds skyld her skrive $S^3(n)$. Eller hvis vi gentager m gange $S^m(n)$. I bund og grund har vi her indført regnearten ”plus” (addition). S lægger jo bare én til tallet hver gang den anvendes. At anvende den m gange svarer til at lægge m til n . Vi beslutter altså: $S^m(n) = n + m$.

Hvad nu hvis vi lægger n sammen med sig selv et antal gange? Ja, så har vi indført regnearten ”gange” (multiplikation), for vi beslutter at: $\underbrace{n + n + \dots + n}_{m \text{ gange}} = n \cdot m$.

Og vi kan indføre regnearten ”potens” ved at beslutte at: $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{m \text{ gange}} = n^m$

Vi kunne også overveje om der findes et tal e , sådan at $n + e = n$ for alle n . Nej – sådan et naturligt tal findes ikke. Men hvis vi indfører et nyt tal der står før 1 i rækken, så vil det faktisk gælde for dette tal. Lad os kalde tallet 0. Der gælder da at $n + 0 = n$ for alle tal.

Vi kunne også overveje om der til et tal n findes et modsat tal n' , således at $n + n' = 0$. Nej, det gør der ikke. Men hvis vi spejler de naturlige tal i 0, så rækken bliver uendeligt lang på den anden side også og kalder disse tal for $-1, -2, -3, \dots$, så vil det faktisk gælde at $n + (-n) = 0$. Hermed har vi ud fra de naturlige tal og regnearten addition opfundet en helt ny talmængde, som vi kender som ”de hele tal”. Ofte betegnes de naturlige tal med symbolet \mathbb{N} og de hele tal med symbolet \mathbb{Z} .

For vores regnearter opstiller vi ofte nogle aksiomer for grundlæggende regneregler, f.eks.:

- $m + n = n + m$ og $n \cdot m = m \cdot n$ (kaldet ”den kommutative lov”).
- $m + (n + p) = (m + n) + p$ og $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$ (kaldet ”den associative lov”).
- $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ (kaldet ”den distributive lov”).

Potensregneregler:

Fra de hele tal kan vi rimelig nemt udlede de *rationale tal* (alle tal der kan skrives som brøker mellem hele tal) betegnet \mathbb{Q} og herfra de *reelle tal* \mathbb{R} , som er alle tal på en normal tallinje.

Vi lader a være et positivt reelt tal og n være et naturligt tal. Vi laver nu følgende definition:

Definition: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ gange}}$ Det præciseres: $a^1 = a$

Definition: Det omvendte af ” n 'te potens” er ” n 'te rod”: $\sqrt[n]{a^n} = a$ og $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Øvelse 5:

Vis ud fra definitionen, at der gælder følgende potensregneregler:

Regneregler 1: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Regneregler 2: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, hvor $n > m$

Regneregler 3: $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$

Regneregler 4: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ og $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Øvelse 6:

Hvis vi vil lade n være andet end naturlige tal, får vi problemer med vores definition. Hvad vil det sige at gange a med sig selv 0 gange, -3 gange eller $\frac{1}{2}$ gang? Vi gør derfor nu noget andet. Vi beslutter at de fire regneregler skal gælde og tillader n at være et helt tal. Vis følgende regneregler:

Regneregler 4: $a^0 = 1$

Regneregler 5: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Øvelse 7:

Vi tillader nu n at være et rationalt tal. Vis følgende regneregler:

Regneregler 6: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Regneregler 7: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Regneregler 8: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ og $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Opgave 1: Euklids bevis for Pythagoras sætning

I 1897 oversatte danskeren Thyra Eibe de to første bøger af Euklids "Elementer". Herunder kan læses oversættelsen af Euklids bevis for Pythagoras sætning. Sprog og stavemåde er moderniseret. Symbolet \square betyder "kvadrat", \triangle betyder "trekant" og \square betyder "parallelogram".

Læs beviset grundigt og forstå de skridt der tages i det. Diskutér undervejs hvilke af slutningerne der virker oplagte og hvilke I ikke finder oplagte og hvilke der virker forkerte.

Find eventuelt et eksemplar af Eibes oversættelse (på biblioteket) og læs de sætninger der går forud.

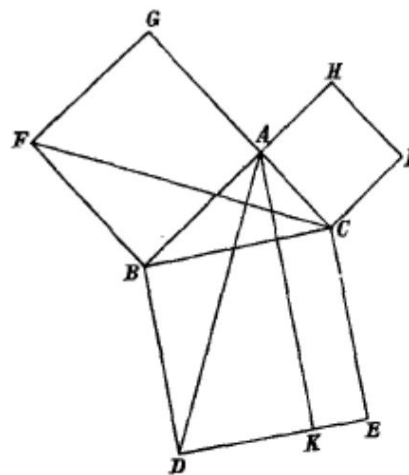
Euklids "Elementer", 1. bog, sætning 47:

I en retvinklet trekant er kvadratet på den side, der ligger overfor den rette vinkel, lig summen af kvadraterne på de sider, der indeslutter den rette vinkel.

Lad ABC være en retvinklet trekant, hvor $\angle BAC$ er ret. Jeg siger da, at $\square BC$ er lig $\square BA + \square AC$.

Lad der nemlig på BC være tegnet et kvadrat $BDEC$ og på BA og AC kvadraterne GB og HC , lad AK være trukket gennem A parallel med BD eller CE , og lad AD og FC være dragne.

Da nu begge vinklerne BAC og BAG er rette, så er de to rette linjer AC og AG tegnede ud fra et punkt A på en ret linje AB til hver sin side, så at vinklerne ved siden af hinanden er lig to rette. Altså ligger AC og AG i forlængelse af hinanden. Af samme grund ligger også BA og AH i forlængelse af hinanden. Nu er $\angle DBC = \angle FBA$; thi de er begge rette. Lad $\angle ABC$ være lagt til dem begge, så er hele $\angle DBA$ lig hele $\angle FBC$. Da nu DB er lig BC , og FB er lig BA , så er de to sider DB og BA parvis lig de to sider CB og BF ; og $\angle DBA$ er lig $\angle FBC$; altså er grundlinje AD lig grundlinje FC ; og $\triangle ABD$ er lig $\triangle FBC$. Men $\square BK$ er lig $2\triangle ABD$; thi de har samme grundlinje BD og ligger mellem de samme paralleller BD og AK ; og kvadrat GB er lig $2\triangle FBC$, thi de har samme grundlinje FB og ligger mellem de samme paralleller FB og GC ; altså er $\square BK$ lig kvadrat GB . På samme måde vil man ved at drage AE og BI kunne bevise, at $\square CK$ er lig kvadrat HC . Altså er hele kvadrat $BDEC$ lig summen af de to kvadrater GB og HC . Men $BDEC$ er $\square BC$, GB og HC er $\square BA$ og $\square AC$. Altså er $\square BC = \square BA + \square AC$.



Altså: i en retvinklet trekant er kvadratet på den side, der ligger overfor den rette vinkel, lig summen af kvadraterne på de sider, der indeslutter den rette vinkel. Hermed er sætningen bevist.

Hvordan laves et bevis

Et bevis er et eksempel på et *matematisk ræsonnement*, hvor vi stiller særligt strenge krav til kvaliteten af de slutninger der indgår. Grundkomponenten i et ræsonnement er slutninger af typen ”hvis A, så B” som også kan udtales ”A medfører B”. En sådan slutning kaldes en *implikation*.

I matematik kan implikationen ”hvis A, så B” skrives: $A \Rightarrow B$

Mange matematiske sætninger har karakter af at være gyldige implikationer. Vi har allerede set Pythagoras’ sætning der lyder: **Hvis** ”en trekant er retvinklet”, **så** ”er kvadratet på siden over for den største vinkel lig summen af kvadraterne på de øvrige sider”.

Vi ser her at A og B altså repræsenterer udsagn – eksempelvis:

A: ”En trekant er retvinklet”.

B: ”Kvadratet på siden over for den største vinkel er lig summen af kvadraterne på de øvrige sider”.

At implikationen ”A medfører B” er sand, betyder ikke at implikationen ”B medfører A” er sand. I eksemplet ”Pythagoras sætning” er dette dog tilfældet. Vi taler derfor om en *biimplikation*. Det vil sige at ”A medfører B” og ”B medfører A” – ofte forkortet til ”A hvis, og kun hvis, B” (som er det samme som ”B hvis, og kun hvis, A”). Biimplikation kan skrives: $A \Leftrightarrow B$

Et eksempel på det modsatte er udsagnet: Hvis ”m og n er begge lige”, så ”m + n er lige”. Denne implikation er sand. Den modsatte er imidlertid ikke sand. Hvis ”m + n er lige” kan vi ikke slutte at ”m og n begge er lige”. Det er nemlig også muligt at der gælder ”m og n er begge ulige”.

Vi kan til gengæld lave en anden slutning. Af ”m og n er begge lige” medfører at ”m + n er lige” kan det sluttes, at hvis ”m + n ikke er lige” så er ”m og n ikke begge lige”. At sætte ”ikke” foran udsagnet A, kaldes at *negere* udsagnet. Det er en forudsætning i logik, at der altid gælder A eller ikke-A. Derfor gælder at ikke-(ikke-A) giver A. Negeringen af A skriver vi i matematik: $\neg A$

Af slutningen ”A medfører B” kan vi altså altid slutte, at ”ikke-B medfører ikke-A”. Dette kaldes at slutte ved *kontraposition*. Med matematisk notation kan det skrives: **Hvis** $A \Rightarrow B$, **så** $\neg B \Rightarrow \neg A$.

En anden vigtig egenskab ved implikation er ,at der gælder (slutningsreglen *logisk syllogisme*): Hvis ”A medfører B” og ”B medfører C”, så gælder ”A medfører C”.

Med matematiske symboler kan det skrives lidt kringlet: $(A \Rightarrow B \text{ og } B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Denne egenskab er ofte hovedkomponenten i et matematisk bevis, hvor vi laver en hel kæde af implikationer: $A_1 \Rightarrow A_2$ **og** $A_2 \Rightarrow A_3$ **og** $A_3 \Rightarrow A_4$ **og** ... **og** $A_{n-1} \Rightarrow A_n$, **derfor** $A_1 \Rightarrow A_n$. Herefter kan udsagnet $A_1 \Rightarrow A_n$ optages som en bevist sætning i den matematiske teori.

Direkte bevis

Et direkte bevis er et bevis der slutter direkte fra sit udgangspunkt, til en indsigt der følger af udgangspunktet. Lad os f.eks. tage sætningen:

”Hvis en lineær funktion f har graf gennem (x_1, y_1) og (x_2, y_2) , så har den hældning $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.”

Bevis:

Definition: En lineær funktion f har en forskrift på formen $f(x) = a \cdot x + b$, hvor a er hældningen.

Da en funktions graf går gennem (x_0, y_0) netop hvis $f(x_0) = y_0$ og da f har graf gennem (x_1, y_1) og (x_2, y_2) , så gælder $f(x_1) = a \cdot x_1 + b = y_1$ og $f(x_2) = a \cdot x_2 + b = y_2$.

Hvis $a \cdot x_1 + b = y_1$ og $a \cdot x_2 + b = y_2$, så $y_2 - y_1 = a \cdot x_2 + b - (a \cdot x_1 + b)$.

Herefter anvendes en række regneregler (dvs. aksiomer og sætninger fra *aritmetikken*):

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 + b - (a \cdot x_1 + b) = a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b = a \cdot x_2 - a \cdot x_1$$

Den distributive lov (se side 6) siger da, at a må sættes udenfor parentes: $y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$

Hvis $y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$, så $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ved *direkte bevis* er det nu bevist, at hvis den lineære funktion $f(x) = a \cdot x + b$ har graf gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) , så har f hældningen $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Øvelse 8:

Vis ved direkte bevis, at hvis den lineære funktion $f(x) = a \cdot x + b$ har graf gennem (x_0, y_0) , så er tallet b bestemt ved $b = y_0 - a \cdot x_0$.

Øvelse 9:

Vis ved direkte bevis, at om funktionen $f(x) = a \cdot x + b$ gælder $f(x + \Delta x) = f(x) + a \cdot \Delta x$.

Øvelse 10:

Vis ved direkte bevis, at hvis den eksponentielle funktion $f(x) = b \cdot a^x$ har graf gennem (x_1, y_1) og (x_2, y_2) , så har f grundtallet $a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$ og tallet b er bestemt ved $b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$.

Øvelse 11:

Vis ved direkte bevis, at om funktionen $f(x) = b \cdot a^x$ gælder $f(x + \Delta x) = f(x) \cdot a^{\Delta x}$.

Modeksempel

I matematik er vi ofte også interesseret i at vise at en bestemt sætning *ikke* gælder. Dette kan oftest gøres ved at give et *modeksempel*. Det vil sige et konkret eksempel på en situation hvor udsagnet A gælder, men ikke fører til B. I så fald kan man ikke generelt sige, at "A medfører B".

Eksempel:

Påstand: Hvis n er et helt tal, så er $n^2 > n$.

Oplagt gælder der, at hvis $n < 0$ så er $n^2 > 0$ og således er $n^2 > n$.

Der er mange eksempler på at det gælder for positive tal: $5^2 = 25 > 5$, $12^2 = 144 > 12$.

Men vi kan betragte eksemplet $n = 1$: $1^2 = 1$, dvs. der gælder *ikke* $n^2 > n$ for $n = 1$.

Det samme kan siges om eksemplet $n = 0$. De to eksempler er altså *modeksempler*, som fører til at påstanden *ikke* kan gøres til en bevist sætning. Bemærk at de to modeksempler er de eneste tilfælde hvor påstanden ikke gælder, men det ændrer ikke på at den *ikke* er en gyldig sætning som den står.

Eksempel:

Påstand: $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

Vi sætter $a = 3$ og $b = 4$. Da fås: $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. Endvidere fås $3 + 4 = 7$.

Da $5 \neq 7$ så er det vist at vi ikke generelt kan antage at $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

Bemærk at det gælder i enkelte situationer, f.eks. for $a = 0$ og $b = 1$.

Øvelse 12:

Vis ved modeksempler at følgende sætninger ikke er sande:

- For ethvert reelt tal x gælder at $x^2 > 0$.
- $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
- En andengradsligning $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ har to løsninger.
- Hvis $g(x)$ og $h(x)$ er positive voksende funktioner, så er $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ voksende.
- Hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ så er $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- Lad C_1 og C_2 være centre for to cirkler med radierne r_1 og r_2 :
Hvis $|C_1 C_2| < r_1 + r_2$, så har cirklerne to skæringspunkter.
- Hvis $f'(x) = 2x$, så er $f(x) = x^2$.
- Hvis $f(x)$ er voksende for $x \in [a; b]$, så er $f'(x) > 0$ for $x \in [a; b]$.
- Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) = 0$, så har f vendetangent i $x = x_0$.

Bevis ved kontraposition

Princippet i kontraposition blev tidligere omtalt som: Hvis der gælder ”hvis A så B”, så gælder der også ”hvis ikke-B, så ikke-A”. Eller med matematisk notation: **Hvis $A \Rightarrow B$, så $\neg B \Rightarrow \neg A$.**

Af dette princip kan udledes at hvis der gælder ”hvis ikke-B, så ikke-A”, så gælder der også ”hvis ikke-(ikke-A), så ikke-(ikke-B)”. Og da ”ikke-(ikke-A)” er det samme som A, er sidstnævnte udsagn det samme som ”hvis A, så B”. Vi kan altså af ”hvis ikke-B, så ikke-A” udlede at der også gælder ”hvis A, så B”. I matematisk notation³: Hvis $\neg B \Rightarrow \neg A$, så $A \Rightarrow B$.

Heraf følger, at ”hvis A, så B” kan bevises, ved at bevise, at der gælder ”hvis ikke-B, så ikke-A”.

Eksempel:

Hvis der for et helt tal n eksisterer to hele tal a og b , således at $n = a \cdot b$, så kaldes dette en faktorisering af tallet n . Specielt gælder for ethvert tal n den trivielle faktorisering: $a = 1$ og $b = n$. Et naturligt tal større end 1, som ikke har andre faktoriseringer end den trivielle, kaldes et *primtal*. F.eks. kan tallet 2 kun faktoreres som $2 \cdot 1$ og tallet 19 kun som $19 \cdot 1$. Derfor er 2 og 19 primtal. Tallet 6 kan derimod faktoreres som $2 \cdot 3$ og $3 \cdot 2$. Disse to tal er derfor *ikke* primtal.

Sætning: Hvis $2^n - 1$ er et primtal, så er n et primtal.

Bevis: Sætningen er på formen ”hvis A, så B”, hvor A er udsagnet ” $2^n - 1$ er et primtal” og B er udsagnet ” n er et primtal”. Sætningen kan bevises ved *kontraposition*, hvis det kan vises at der gælder ”hvis ikke-B, så ikke-A”. Her er ikke-B udsagnet ” n er ikke et primtal” og ikke-A udsagnet ” $2^n - 1$ er ikke et primtal”.

Antag n ikke er et primtal. Da findes en ikke-triviel faktorisering $n = a \cdot b$, hvor $1 < a \leq b < n$.

Der gælder: $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1) \cdot (2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 2^{a \cdot 2} + 2^{a \cdot 1} + 1)$

Da $a > 1$, er $2^a - 1 > 1$. Da $b - 1 \geq 1$ og $a > 1$ er $2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 2^{a \cdot 2} + 2^{a \cdot 1} + 1 > 1$. Altså er $(2^a - 1) \cdot (2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 2^{a \cdot 2} + 2^{a \cdot 1} + 1)$ en ikke-triviel faktorisering af $2^n - 1$, som således ikke er et primtal. Det er altså vist, at hvis n ikke er et primtal, så er $2^n - 1$ ikke et primtal. Altså hvis ”ikke-B, så ikke-A”. Heraf følger ved kontraposition, at ”hvis A, så B”, det vil sige, at hvis $2^n - 1$ er et primtal, så er n et primtal.

Øvelse 13: Argumentér for at påstandene i de foregående seks linjer, må være sande.

³ Hvis $\neg B \Rightarrow \neg A$, så $\neg(\neg A) \Rightarrow \neg(\neg B)$, som er det samme som $A \Rightarrow B$.

Bevis ved modstrid

Hvis man kan vise at et udsagn A fører til det absurde og altid falske udsagn ” B og ikke- B ”, så siges det at man har bevist ”ikke- A ” ved *modstrid*. Da A fører til noget der aldrig gælder, gælder A aldrig. Og da der altid gælder enten A eller ikke- A , så må ikke- A gælde.

Eller sagt omvendt. Hvis vi kan vise at ikke- A fører til ” B og ikke- B ”, så har vi bevist A .

I matematiske notation vil vi skrive: Hvis $(\neg A \Rightarrow B \text{ og } \neg B)$, så A .

Eksempel:

Sætning: $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal.

Bevis:

Tallet q er rationalt, hvis der findes hele tal m og n , så q kan skrives som den uforkortelige brøk $\frac{m}{n}$.

Tallet r er således irrationalt, hvis det ikke kan skrives som en uforkortelig brøk af to hele tal.

Vi antager at $\sqrt{2}$ er rationalt. Der findes således m og n således at $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ er uforkortelig. Da fås:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$m^2 = 2 \cdot n^2$$

Da m^2 kan skrives på formen $2 \cdot k$, er m^2 lige. Dermed er også m lige og kan skrives på formen $2p$.

Da $m = 2p$ fås:

$$m^2 = (2p)^2 = 2p \cdot 2p = 2 \cdot 2p^2 = 2 \cdot n^2$$

$$n^2 = 2p^2$$

Da n^2 kan skrives på formen $2 \cdot l$, er n^2 lige. Dermed er også n lige og kan skrives på formen $2q$.

Da $m = 2p$ og $n = 2q$ fås:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} = \frac{2 \cdot p}{2 \cdot q}$$

Men denne brøk er ikke uforkortelig. Hvis altså vi antager at $\sqrt{2}$ kan skrives som en uforkortelig brøk, fører det til at brøken kan forkortes. Antagelsen ” $\sqrt{2}$ er rational” fører altså til at den kan skrives som en brøk der både er uforkortelig og forkortelig. Altså noget der ikke kan være sandt. Deraf følger at der må gælde ” $\sqrt{2}$ er ikke rational”. Det er bevist ved modstrid at $\sqrt{2}$ er irrationalt.

Induktions-bevis

En særlig type bevis, som kan gælde for sætninger der baserer sig på de naturlige tals egenskaber, er induktionsbeviset. Et induktionsbevis går på formen:

Hvis det gælder, at ”hvis A gælder for n , så gælder A også for $n + 1$ ” og ”A gælder for $n = 1$ ”, så gælder A for alle n .

Det første udsagn betyder, at hvis udsagnet A gælder for et vilkårligt tal n , så gælder det også for det næste tal i rækken $n + 1$. Men da det gælder for $n + 1$, så gælder det også for $n + 2$, osv. Dette udsagn siger dog ikke noget om hvor vidt det gælder for nogle tal – kun at *hvis* det gælder for et tal, så gælder det også for det efterfølgende tal. Hvis man herefter kan vise at A gælder for $n = 1$, så ved man at det også gælder for $n = 2$. Men så gælder det også for $n = 3$ og dermed for $n = 4$, og så videre... det følger heraf, at A gælder for ethvert n .

Modificeret kan det siges, at hvis A gælder for n , så gælder A også for $n + 1$ samt at A gælder for $n = m$, så gælder A for ethvert tal $n \geq m$.

Eksempel:

Formlen for annuitetsopsparring siger, at efter n årlige indbetalinger af beløbet b til en konto, med en årlig rente r , så vil der på kontoen stå:

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Vi kan vise, at hvis dette er korrekt, så gælder formelen også for A_{n+1} . Vi husker at fra det ene år til det næste får man dels tilskrevet renten r til indestændet A_n , dels sættes beløbet b ind på kontoen:

$$\begin{aligned} A_n \cdot (1+r) + b &= b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \cdot (1+r) + b = b \cdot \left(\frac{(1+r)^{n+1} - (1+r)}{r} + 1 \right) \\ &= b \cdot \left(\frac{(1+r)^{n+1} - 1 - r}{r} + \frac{r}{r} \right) = b \cdot \left(\frac{(1+r)^{n+1} - 1 - r + r}{r} \right) \\ &= b \cdot \left(\frac{(1+r)^{n+1} - 1}{r} \right) = A_{n+1} \end{aligned}$$

Det ses altså at hvis formelen gælder for n , så gælder den også for $n + 1$.

For $n = 1$ fås: $A_1 = b \cdot \frac{(1+r)^1 - 1}{r} = b \cdot \frac{1+r-1}{r} = b \cdot \frac{r}{r} = b \cdot 1 = b$

Da indestående efter én indbetaling netop er beløbet b , gælder formelen altså for $n = 1$. Men så har vi vist at den også gælder for $n = 2$, og dermed for $n = 3$, osv. Altså gælder den for alle n .

Opgave 2

Giv et direkte bevis for de tre kvadratsætninger:

$$1) (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$2) (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$3) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Opgave 3

Giv et direkte bevis for, at der for vektorer gælder følgende regneregler:

$$a) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$b) k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$$

$$c) \vec{a} \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d}$$

Opgave 4

Bevis ved modstrid, at der findes uendeligt mange primtal (se definition af primtal på side 12).

- Vis at hvis $n > 1$, så findes der et primtal p som går op i n , det vil sige at der eksisterer et naturligt tal m , således at $n = p \cdot m$, samt at der ikke findes et primtal p , som går op i 1.
- Antag at der er endeligt mange primtal, som kan skrives på listen: p_1, p_2, \dots, p_k , hvor p_k er det største af alle primtal. Betragt tallet $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$.
Argumentér for at N ikke er et primtal.
- Argumentér for at der må findes et primtal p og et naturligt tal m så $N = p \cdot m$.
- Da p er et primtal findes det i rækken p_1, p_2, \dots, p_k . Lad nu n være produktet af alle primtal $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$, på nær p . Da gælder: $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k = p \cdot n$.
- Argumentér for at der gælder: $p \cdot n + 1 = p \cdot m$.
- Argumentér for at der gælder: $p \cdot (m - n) = 1$ samt hvorfor dette viser at p ikke er et primtal.
- Det er vist at hvis p_k er det største primtal, så er tallet p såvel et primtal som ikke et primtal.
Argumentér på den baggrund for, at der ikke findes noget største primtal.

Opgave 5

Påstand: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

- a) Giv et induktionsbevis for påstanden.

Opgave 6

Påstand: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1}$

- a) Vis at hvis påstanden gælder for n , så gælder den også for $n + 1$.
 b) Vis at påstanden *ikke* gælder for $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$ eller nogen anden n -værdi.
 c) Reparér påstanden så den bliver sand i tilfældene $n = 1, n = 2, n = 3$ og $n = 4$, og giv et induktionsbevis for denne.

Opgave 7

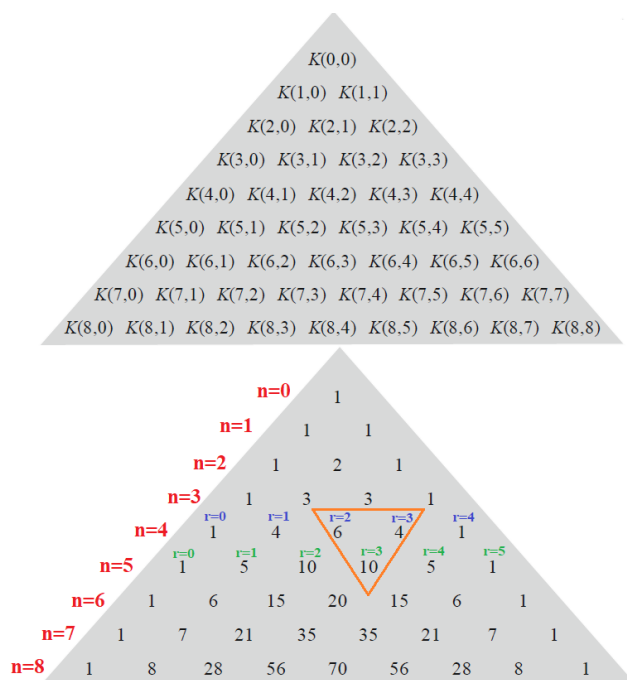
I Pascals trekant ses alle værdier af binomialkoefficienten $K(n, r)$, som vist til højre.

Alle steder gælder, at en værdi er lig summen af de to tal der står lige oven over (se eksempel i den orange trekant på nederste figur).

- a) Opstil et formelt udtryk med $K(n, r)$, som udtrykker denne generelle sammenhæng.
 b) Giv et direkte bevis for, at denne sammenhæng gælder.

Det viser sig at for række nummer n i Pascals trekant, bliver rækkesummen 2^n .

- c) Giv et induktionsbevis for at dette gælder. (Hint! Brug princippet bevist ovenfor).



Opgave 8

Påstand: $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \dots + (n + 1) \cdot 2^n = n \cdot 2^{n+1}$

a) Giv et induktionsbevis for påstanden.

Opgave 9

Påstand: For ethvert naturligt tal n gælder at $n^2 - n + 41$ er et primtal.

a) Bevis ved et modeksempel, at påstanden er forkert.

Opgave 10

Påstand: Alle naturlige tal har en unik egenskab.

Bevis:

Tallet 1 har oplagt en unik egenskab (f.eks. at det er det første naturlige tal).

Lad tallene $1, 2, \dots, k$ alle have en unik egenskab.

Vi påstår nu at tallet $k + 1$ ikke har en unik egenskab.

Dermed er tallet $k + 1$ det mindste tal uden en unik egenskab – men dette er netop en unik egenskab, så $k + 1$ har altså en unik egenskab.

Det er altså vist at hvis tallene op til k har en unik egenskab, så har $k + 1$ det også. Endvidere ses det at det gælder for tallet 1. Dermed har alle naturlige tal en unik egenskab.

- a) Hvilke bevistyper indgår i ovenstående bevis?
- b) Diskutér om beviset er gyldigt.

Opgave 11

Bevis, at hvis et linjestykke AB deles med punktet C , således at $|AC| < |BC|$, således at forholdet mellem hele linjestykket og den største del $\frac{|AB|}{|BC|}$ er lig forholdet mellem mindste og største del $\frac{|BC|}{|AC|}$.

Så har forholdet altid samme værdi φ . Bestem denne værdi.

Vis at $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

Formel logik – bevisets bevis

Implikation

Udgangspunktet for meget af logikken er udsagnet $A \Rightarrow B$, som vi kalder for en *implikation*. Inden for den *matematiske logik* giver vi sådanne udtryk en helt præcis betydning. Vi kalder det for et *logisk udsagn*. Et logisk udsagn kan kun have to værdier: sand (S) eller falsk (F).

Et logisk udsagn består af logiske variable. I udtrykket ovenfor A og B . En logisk variabel er i sig selv et logisk udsagn, som kan have værdierne sand (S) eller falsk (F).

Sandhedsværdien af et logisk udsagn afhænger alene af sandhedsværdien af de indgående logiske variable. Betydningen af tegnet " \Rightarrow " er således entydigt fastlagt ved hvordan sandhedsværdien af " $A \Rightarrow B$ " afhænger af sandhedsværdierne af A og B . Da der kun er fire kombinationer, kan det nemt opskrives i en udtømmende tabel. Vi kalder en sådan tabel for en *sandhedstabel*.

A	B	$A \Rightarrow B$
S	S	S
S	F	F
F	S	S
F	F	S

Af første linje ses, at hvis både A og B er sande udsagn, så er udsagnet $A \Rightarrow B$ også sandt. At noget sandt medfører noget sandt synes oplagt. Det kan være et simpelt eksempel som:

Hvis det regner, så er jorden våd.

Men det kan også være udsagn som lyder mere vrøvlende, f.eks.:

Hvis løven er et kattedyr, så er Paris hovedstaden i Frankrig

Udsagnet lyder skørt, men er trods alt sand. Løven er et kattedyr og Paris er hovedstaden i Frankrig, så det er faktisk sandt at hvis det første gælder, så gælder det andet også, selvom der ikke er nogen direkte årsagssammenhæng mellem de to ting.

Af anden linje ses, at hvis A er sand og B er falsk, så er udsagnet $A \Rightarrow B$ falsk. Det kan f.eks. være udsagnet: *Hvis løven er et kattedyr, så er Paris hovedstaden i Sverige*. Det er et falsk udsagn, for løven er faktisk et kattedyr og Paris er rent faktisk ikke hovedstad i Sverige.

Af tredje linje ses det mere overraskende udsagn: Hvis A er falsk og B er sand, så er $A \Rightarrow B$ et sandt udsagn. Lad os tage udsagnet: *Hvis månen er lavet af ost, så er løven et kattedyr*. Det er sandt. Det

forhold at månen ikke er lavet af ost, ændrer jo ikke på at løven er et kattedyr. Og hvis månen faktisk var lavet af ost, ville løven jo faktisk være et kattedyr – selvom der ikke er en sammenhæng.

Den fjerde linje, at hvis A og B begge er falsk, så er $A \Rightarrow B$ sand. Dette er måske det som er sværest at acceptere. Se på udsagnet: Hvis *månen er lavet af ost*, så er *Paris hovedstad i Sverige*. Her har vi svært ved ikke at se en årsagssammenhæng mellem de to udsagn. For hvis månen nu var lavet af ost, så ville Paris jo stadig ikke være hovedstad i Sverige... så hvorfor er udsagnet sandt? Det er det fordi månen ikke er lavet af ost. Der er derfor ikke noget galt i at sige, at hvis den var, ville det føre til noget forkert. For den er det ikke. Og hvis den var, ville vi være i linje 2.

Pointen er at man skal passe på med at sætte for mange hverdagsord på den formelle logik. Den logiske betydning i det symbolske udtryk " $A \Rightarrow B$ " er fastlagt af tabellen ovenfor og ikke af andet. De sproglige udlægninger kommer i anden række.

Negation

Vi har indført udsagnet ikke- A med symbolet $\neg A$. Om det gælder tabellen:

A	$\neg A$
S	F
F	S

Vi kan nu bevise kontrapositionsprincippet som siger, at $A \Rightarrow B$ er det samme som $\neg B \Rightarrow \neg A$.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
S	S	S	F	F	S
S	F	F	F	S	F
F	S	S	S	F	S
F	F	S	S	S	S

For A og B begge sande gælder at $A \Rightarrow B$ er sand, samt at $\neg A$ og $\neg B$ begge er falske. Men pr. definition vides at "falsk medfører falsk" er et sandt udsagn, så $\neg B \Rightarrow \neg A$ er netop sandt.

I linjen efter ses, at for sand A og falsk B , fås falsk $\neg A$ og sand $\neg B$. Og da "sand medfører falsk" per definition er et falsk udsagn, bliver $\neg B \Rightarrow \neg A$ til et falsk udsagn. Og så videre...

Det centrale er at man nemt indser, at uanset hvilke sandhedsværdier der vælges for A og B , så vil sandhedsværdierne af udsagnet $A \Rightarrow B$ og $\neg B \Rightarrow \neg A$ altid være den samme.

Vi siger om de to udtryk, at de er *ækvivalente*.

Konjunktion

Vi har tidligere benyttet ordet ”og” i sproglig fremstilling af logiske udsagn, uden at præsentere et symbol for dette. Det gør vi nu. Udsagnet ” A og B ” vil i matematisk logik skrives $A \wedge B$. Symbolet ” \wedge ” kaldes for ”konjunktion” eller på dansk bare et ”logisk og”. Sandhedstabellen er:

A	B	$A \wedge B$
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	F

Det ses at udsagnet $A \wedge B$ er sandt, netop når både A og B er sande, mens at udsagnet er falsk, hvis én eller begge af de to variable har sandhedsværdien ”falsk”.

Disjunktion

I det logiske sprog findes også et ”logisk eller”. I daglig sprog betyder ”eller” ofte ”enten-eller men ikke både-og”. I formel logik betyder ”eller” altid ”og/eller”. Det logiske symbol for ” A og/eller B ” er $A \vee B$. Den tilhørende sandhedstabel er:

A	B	$A \vee B$
S	S	S
S	F	S
F	S	S
F	F	F

Det ses at udsagnet ” $A \vee B$ ” er falsk netop hvis både A og B er falsk, men ellers ikke.

Biimplikation

Vi har tidligere set, at udtrykket $A \Rightarrow B$ ikke er ækvivalent med $B \Rightarrow A$. Men hvis begge gælder, fås altså følgende udtryk: $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Det har følgende sandhedsværdi:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
S	S	S	S	S	S
S	F	F	S	F	F
F	S	S	F	F	F
F	F	S	S	S	S

Vi forkorter dette udtryk som siger ”Hvis A så B og hvis B så A ” med symbolet: $A \Leftrightarrow B$. Udtrykket kaldes *biimplikation* og siger netop at A og B er ækvivalente. Udtrykket er altså sandt hvis A og B har samme sandhedsværdi og falsk hvis de har omvendt sandhedsværdi.

Når vi anvender den formelle logiks symboler i konkrete matematiske ræsonnementer, kan vi skrive udledningerne på meget komprimeret form. Løsning af en ligning er et eksempel:

$$4x - 2 = 13 - x \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3$$

Pointen er at den anden ligning er sand, hvis den første er. Men også omvendt. Og den tredje ligning er sand, fordi den anden er, og omvendt. Og den første gælder således fordi den tredje gælder og omvendt. Vi omskriver altså et udsagn på lovlig vis, så vi sikrer at der gælder biimplikation.

Et andet eksempel kan være følgende:

$$x^2 - 5 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$$

Her er vi nødt til at formulere det sidste udtryk med disjunktion. Det ville nemlig være ukorrekt at slutte eksempelvis: $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$, fordi der også kan gælde $x = -3$. Til gengæld ville det være korrekt at skrive: $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$. Formuleringen $x = -3 \vee x = 3$ er netop sandt hvis der gælder at $x = 3$ eller $x = -3$ (da begge ikke kan være sande samtidigt, er den mulighed irrelevant).

Dette forklarer også hvorfor man i sproglig fremstilling af løsningen på en andengradsligning altid skal skrive ” $x = -3$ eller $x = 3$ ” og aldrig ” $x = -3$ og $x = 3$ ”. Udsagnet ” $x = -3 \wedge x = 3$ ” er altid falsk, fordi begge udtryk ikke kan være sande samtidigt.

Et andet eksempel på brug af formel logik i opgaveløsning kunne være:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 3 + 2 \cdot (-9) = 18 - 18 = 0 \wedge \vec{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Den første implikation gælder kun den ene vej, fordi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ kan gælde i mange andre tilfælde, end for de nævnte to vektorer. Den anden implikation er en biimplikation, fordi et prikprodukt mellem to egentlige vektorer (altså to vektorer hvoraf ingen er nulvektoren) kun er nul, hvis vektorerne er ortogonale. Omvendt er to vektorer kun ortogonale, hvis prikproduktet er 0.

Beviset for topunktsformlen for lineære funktioner kan udtrykkes:

$$y_1 = a \cdot x_1 + b \wedge y_2 = a \cdot x_2 + b \Leftrightarrow$$

$$y_2 - y_1 = ax_1 + b - (ax_2 + b) = ax_1 + b - ax_2 - b = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2) \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Der kan også bemærkes at der gælder: $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$.

Men der gælder ikke $f(x) = x^2 \Leftrightarrow f'(x) = 2x$, fordi der *ikke* gælder $f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2$

Det sidste gælder ikke, fordi $f'(x) = 2x$ også kan gælde for $f(x) = x^2 + 10$.

I så fald ville udsagnet $f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2$ give at ”sand medfører falsk”, som er falsk.

Kvantorer

I bevistypen ”modeksempel” så vi eksempler på sætninger af typen:

For alle x gælder egenskaben $P(x)$.

Et eksempel på en sådan påstand kunne være:

For alle $x \in \mathbb{R}$ gælder at $x^2 > 0$.

Vi kan udtrykke ”for alle x ” med det særlige matematiske symbol *alkvantoren*: $\forall x$

Dermed vil den generelle påstand, at P gælder for alle x , blive til: $\forall x: P(x)$

Negeringen af udsagnet ”For alle x gælder $P(x)$ ” er:

Der eksisterer et x , som ikke har egenskaben $P(x)$.

Udsagnet ”der eksisterer (mindst) et x ” kan skrives med *eksistenskvantoren*: $\exists x$

Dermed kan den omvendte påstand at P ikke gælder for alle x blive: $\exists x: \neg P(x)$

I tilfældet ovenfor kan vi konstatere at der eksisterer $x = 0$, for hvilken der ikke gælder $x^2 > 0$.

Vi kan således konstatere: $\exists x: x^2 \not> 0$.

Heraf kan vi udlede at der *ikke* gælder: $\forall x: x^2 > 0$.

Vi kalder et sådan bevis for, at påstanden ikke gælder for *et modeksempel*.

Der følger endvidere at udsagnet: ”Der eksisterer (mindst) et x , med egenskaben $P(x)$ ”.

Symbolsk kan det altså udtrykkes: $\exists x: P(x)$

Negeringen af udsagnet ”der eksisterer et x , med egenskaben $P(x)$ ” er at ”for alle x gælder at de ikke har egenskaben $P(x)$ ”.

Symbolsk kan negeringen af udtrykket altså skrives: $\forall x: \neg P(x)$

Et eksempel kan være påstanden: $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0$.

Dette udsagn er falsk, fordi der gælder det negerede udsagn: $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$.

Kvantorerne ”for alle” og ”der eksisterer” kan altså til dels opfattes som hinandens negeringer.