Note: Binomialfordeling med Nspire

KBJ, november 2019

Binomialfordelingens grundlag

Et sandsynlighedseksperiment består af gentagelser af et basiseksperiment E.
Ved basiseksperimentet er der fokus på én særlig hændelse, basishændelsen H.
Sandsynligheden for H når E udføres er hver gang p, kaldet *sandsynlighedsparameteren*.
Basiseksperimentet E udføres n gange, kaldet *antalsparameteren.*

Den stokastiske variabel X angiver antal gange H sker, når E udføres n gange.
Udfaldsrummet for X er da tallene $0, 1, 2, \ldots, n$, idet H mindst sker 0 gange og højest n gange.
Sandsynlighedsfordelingen for X er da bestemt ved udtrykket:

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}$$

Hvor $K(n, r)$ (*binomialkoefficienten*) er antal kombinationer af r elementer valgt blandt n.
I Nspire kan $K(n, r)$ bestemmes med kommandoen: `ncr(n, r)`

At X er en stokastisk variabel som er binomialfordelt med sandsynlighedsparameter p og antalsparamenter n skrives kort: $X \sim b(n, p)$

<u>Eksempel</u>
En stokastisk variabel X er binomialfordelt: $X \sim b\left(40, \frac{1}{3}\right)$.

Sandsynligheden for udfaldet $X = 10$ kan da bestemmes ved i Nspire at skrive:

$$\boxed{\mathrm{nCr}(40,10) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right)^{40-10}}$$

De fleste steder viser hvid baggrund det indtastede og grå baggrund resultatet ved tryk på ”enter”:

$$\boxed{\mathrm{nCr}(40,10) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right)^{40-10} \qquad 0.074864}$$

På baggrund af beregningen ses at $P(X = 10) = 0{,}075$ svarende til 7,5%.

Generelt kan kommandoen `binompdf` også benyttes:

$$P(X = r) = \texttt{binompdf(n,p,r)}$$

binompdf(40,1/3,10)	
$\text{binomPdf}\left(40,\frac{1}{3},10\right)$	0.074864

Hændelser

En hændelse er en delmængde af udfaldsrummet. Ofte ser vi ved binomialfordelinger på delmængder som er sammenhængende intervaller. F.eks. $10 \leq X \leq 13$. Sandsynligheden for hændelsen kaldes da $P(10 \leq X \leq 13)$ og bestemmes som

$$P(10 \leq X \leq 13) = P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) + P(X = 13)$$

Med kommandoen `binomcdf` kan Nspire bestemme sandsynlighed for et interval af udfald:

$$P(a \leq X \leq b) = \texttt{binomcdf(n,p,a,b)}$$

binomcdf(40,1/3,10,13)	
$\text{binomCdf}\left(40,\frac{1}{3},10,13\right)$	0.43315
$\text{binomPdf}\left(40,\frac{1}{3},10\right)+\text{binomPdf}\left(40,\frac{1}{3},11\right)+\text{binomPdf}\left(40,\frac{1}{3},12\right)+\text{binomPdf}\left(40,\frac{1}{3},13\right)$	0.43315

For hændelserne $X \leq r$ eller $X \geq r$ benyttes følgende specielle kommandoer:

$$P(X \leq r) = \texttt{binomcdf(n,p,0,r)}$$

$$P(X \geq r) = \texttt{binomcdf(n,p,r,n)}$$

$\text{binomCdf}\left(40,\frac{1}{3},0,15\right)$	0.76884
$\text{binomCdf}\left(40,\frac{1}{3},15,40\right)$	0.342179

Til højre ses at $P(X \leq 15) = 0{,}769$, svarende til at sandsynligheden for ”højest 15” er 76,9%, samt $P(X \geq 15) = 0{,}342$, svarende til at sandsynligheden for ”mindst 15” er 34.2%.

Bemærk at kommandoen `binompdf(n,p)` producerer en liste med alle værdier for $P(X = r)$ samt at `binomcdf(n,p)` producerer en liste med alle værdier for $P(X \leq r)$.

Bestemmelse af q-fraktil

Det *mindste* tal a som gør at $P(X \leq a) > q$ kaldes for q-fraktilen og bestemmes med kommando:

$$a = \texttt{invbinom(q,n,p)}$$

F.eks. kan 25%-fraktilen for $X \sim b\left(40, \frac{1}{3}\right)$ bestemmes som vist herunder til venstre:

invbinom(25%,40,1/3)	
$\text{invBinom}\left(25\%,40,\frac{1}{3}\right)$	11

$\text{binomCdf}\left(40,\frac{1}{3},0,11\right)$	0.273522
$\text{binomCdf}\left(40,\frac{1}{3},0,10\right)$	0.171435

Det ses altså at 25%-fraktilen for X er 11. Det betyder, at hvis eksperimentet gentages et stort antal gange, så vil X antage værdier på 11 eller lavere ca. 25% af gangene. Som det ses af beregningerne til højre er $P(X \leq 11) = 27{,}4\% > 25\%$ og $P(X \leq 10) = 17{,}1\% < 25\%$.
Tallet $a = 11$ er således det mindste tal som gør at $P(X \leq a) > 25\%$.

Det *største* tal b som gør at $P(X \geq b) > q$ svarer til $(1 - q)$-fraktilen og bestemmes ved:

$$b = \texttt{invbinom(1-q,n,p)}$$

invbinom(95%,40,1/3)	
$\text{invBinom}\left(95\%,40,\frac{1}{3}\right)$	18

$\text{binomCdf}\left(40,\frac{1}{3},18,40\right)$	0.083202
$\text{binomCdf}\left(40,\frac{1}{3},19,40\right)$	0.044086

Det vil sige at det største tal b så $P(X \geq b) > 5\%$ er $b = 18$.
Det ses således at $P(X \geq 18) = 8{,}3\% > 5\%$ og $P(X \geq 19) = 4{,}4\% < 5\%$.

Middelværdi og spredning

Middelværdien (forventet værdi) for X beregnes: $\mu = n \cdot p$

Spredningen for X beregnes: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Hvis disse skal bruges senere kan de defineres som vist til højre.

$n:=40$	40.
$p:=\frac{1}{3}$	0.333333
$m:=n\cdot p$	13.3333
$s:=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$	2.98142

Sandsynlighedsplot og fordelingsplot

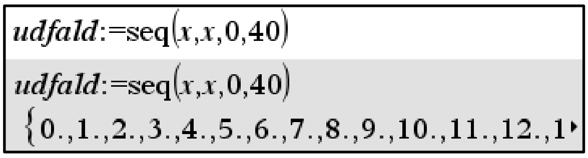
For at tegne et søjlediagram over sandsynlighederne i en binomialfordeling skal oprettes to lister. Første liste skal indeholde alle hele tal fra 0 til n og kan i et beregninger-vindue defineres ved:

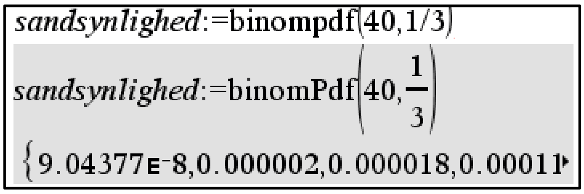
```
udfald:=seq(x,x,0,n)
```

Bemærk at listens navn bliver ”`udfald`”. Anden liste skal indeholde sandsynlighederne:

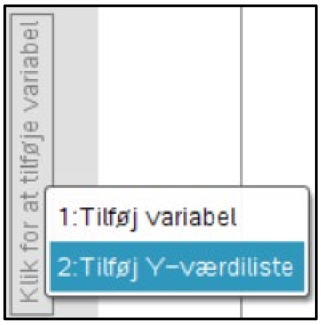
```
sandsynlighed:=binompdf(n,p)
```

Denne listes navn bliver ”`sandsynlighed`”.





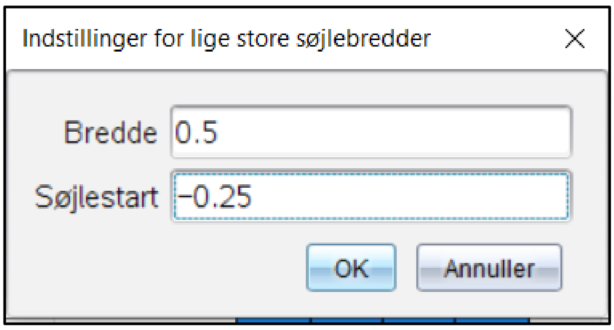
Når de to lister er oprettet laves et ”Diagrammer og statistik”-vindue på ny side i samme opgave.
På x-aksen indsættes listen ”Udfald”.
På y-aksen højreklikkes og vælges ”Tilføj Y-værdiliste”, hvorefter ”Sandsynlighed” vælges.
Vælg nu ”2. Diagramegenskaber” → ”2. Egenskaber for histogram” → ”2. Søjleindstillinger”→”1. Lige store intervaller”, som vist herunder:



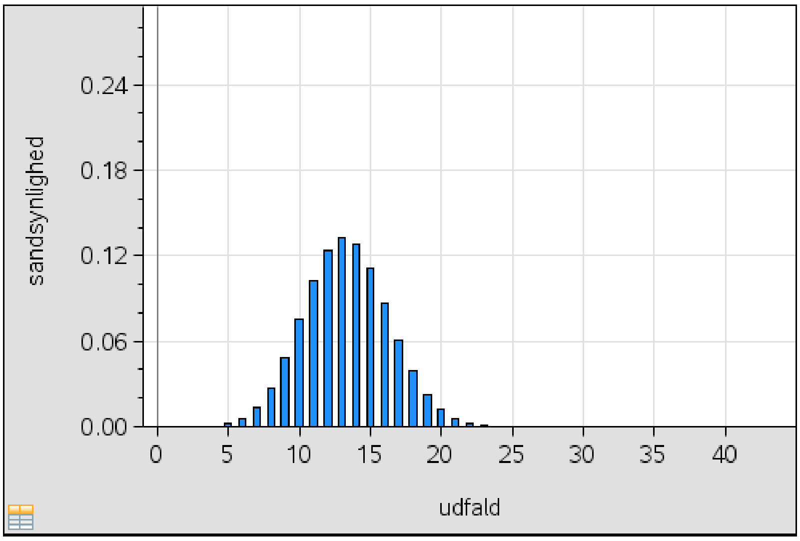
Som indstillinger for søjlerne vælges altid som vist på figuren til højre:

Bredde: 0,5

Søjlestart: -0,25



Herefter tegnes søjlediagram over sandsynlighedernes fordeling mellem de mulige udfald fra 0 til 40, i det højden af søjlen angiver udfaldets sandsynlighed.



Det ses at den højeste søjle findes tæt på middelværdien

$\mu = 40 \cdot \frac{1}{3} \approx 13{,}3$

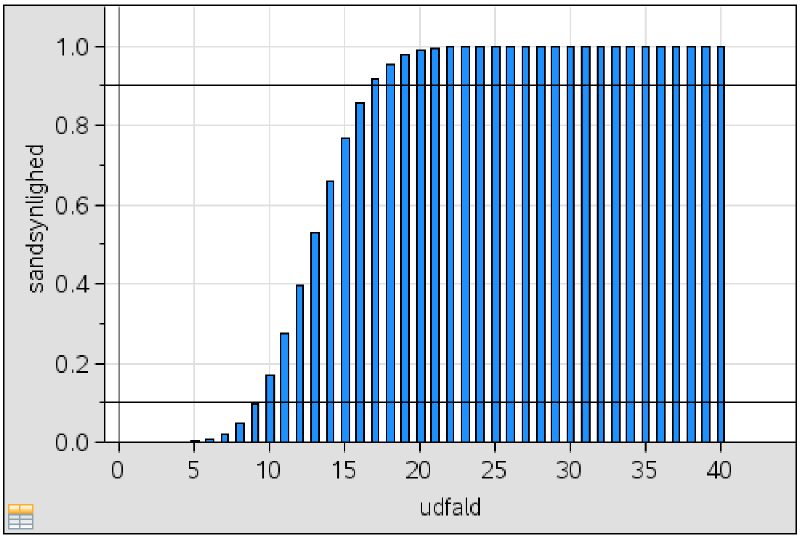
Det ses at langt fra μ er sandsynlighederne så små, at søjlerne ikke kan ses.

Ved at højreklikke i koordinatsystemet og vælge ”3. Zoom” → ”1. Indstillinger for vindue…” kan det udsnit af koordinatsystemet som ses justeres.

Ønskes i stedet et fordelingsplot over sandsynlighederne for at X mindst er tallene fra 0 til 40, skal listen sandsynligheder i stedet laves med kommandoen:

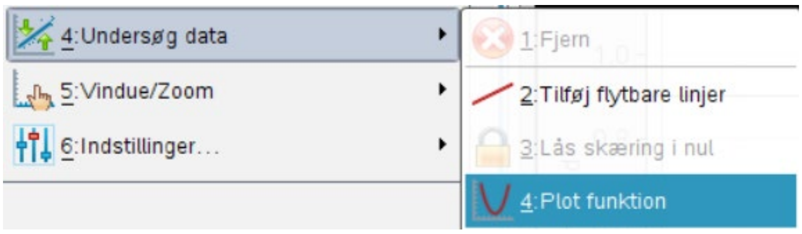
```
sandsynlighed:=binomcdf(n,p)
```

På figuren til venstre ses fordelingsplottet for $X \sim b\left(40, \frac{1}{3}\right)$.



Husk at YMaks under ”Indstillinger for vindue” (se ovenfor) bør sættes til 1,1.

Under ”4. Undersøg data” → ”4. Plot funktion” kan man tegne grafer for funktioner ved at indtaste forskriften. Indtegnes de vandrette liner $f1(x) = 0{,}1$ og $f2(x) = 0{,}9$ kan 10%- og 90%-fraktilerne aflæses til henholdsvis 10 og 16.



Binomialtest, signifikansniveau, nulhypotese og acceptmængde

Hvis der skal udføres to-sidet binomialtest på et signifikansniveau S, kan man med fordel bestemme den tilhørende acceptmængde. Det gøres ved at bestemme $\frac{S}{2}$-fraktilen og $\left(1-\frac{S}{2}\right)$-fraktilen:

$$a = \texttt{invbinom(S/2,n,p)}$$
$$b = \texttt{invbinom(1-S/2,n,p)}$$

Da vil acceptmængden for binomialtestet være $[a; b]$. Testet afgør om vi kan *forkaste* eller *ikke-forkaste* (også kaldet *acceptere*) en ved nulhypotesen H_0 antaget sandsynlighed p.

Hvis vores observerede værdi af X ligger i $[a; b]$ vil vi *ikke forkaste* nulhypotesen H_0.
Hvis X ikke ligger i $[a; b]$ vil vi *forkaste* nulhypotesen H_0 og overveje en alternativ hypotese H_a.

<u>Eksempel: To-sidet test</u>

Vores nulhypotese H_0: $p = \frac{1}{3}$. Vi ønsker at lave et to-sidet test af nulhypotesen på et 5%-signifikansniveau. Vi bestemmer derfor 2,5%-fraktilen og 97,5%-fraktilen med Nspire:

$$\text{invBinom}\left(0.025,40,\frac{1}{3}\right) \quad 8$$
$$\text{invBinom}\left(0.975,40,\frac{1}{3}\right) \quad 19$$

Det ses at acceptmængden i vores binomialtest er $[8; 19]$. Hvis vi ved eksperimentet observerer $X = 10$, ligger vi i acceptmængden og "accepterer", dvs. undlader at forkaste, H_0. Hvis vi ved eksperimentet observerer $X = 5$, ligger vi uden for acceptmængden (i "den kritiske mængde") og *forkaster* H_0. Dermed har vi bekræftet alternativhypotesen H_a: $p \neq \frac{1}{3}$.

<u>Eksempel: En-sidet test</u>

Hvis vores test er en-sidet til venstre, bestemmes S-fraktilen. Acceptmængden på et 5%-signifikansniveau er altså $[9; 40]$. Hvis vi forkaster H_0 bekræfter vi dermed H_a: $p < \frac{1}{3}$.

$$\text{invBinom}\left(0.05,40,\frac{1}{3}\right) \quad 9$$

Hvis testet er en-sidet til højre, bestemmes $(1-S)$-fraktilen. Acceptmængden på et 5%-signifikansniveau er altså $[0; 18]$. Hvis vi forkaster H_0 bekræfter vi dermed H_a: $p > \frac{1}{3}$.

$$\text{invBinom}\left(0.95,40,\frac{1}{3}\right) \quad 18$$

Normalfordelingsapproksimation

En binomialfordelt stokastisk variabel $X \sim b(n, p)$ er en *diskret* sandsynlighedsfordeling. Det betyder at udfaldsrummet har et endeligt antal udfald. I en del eksperimenter kan udfaldene i princippet være alle tal på hele talaksen – også negative tal, brøker, mv. En sådan fordeling siges at være *kontinuert*. Det mest anvendte eksempel på en sådan fordeling er *normalfordelingen*.

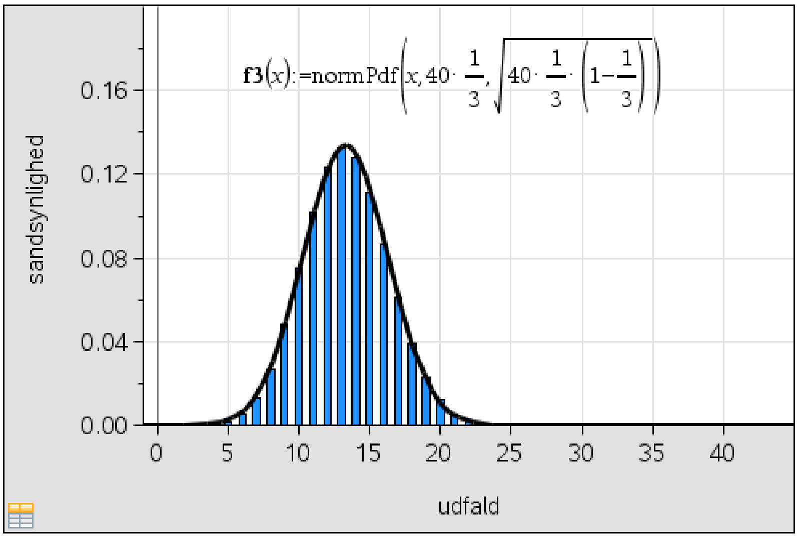
En normalfordeling er kendetegnet ved en *middelværdi* μ og en *spredning* σ. At en stokastisk variabel X er normalfordelt med middelværdi μ og spredning σ skrives: $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Tæthedsfunktionen for $X \sim N(\mu, \sigma)$ har forskriften: $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

I Nspire kan dette skrives: $f(x) =$ `normpdf(x,μ,σ)`

Det viser sig at en binomialfordelt stokastisk variabel X med middelværdi μ og spredning σ ofte kan beskrives tilnærmelsesvist som om den var normalfordelt $X \sim N(\mu, \sigma)$.

I et søjlediagram over $X \sim b(n, p)$ kan man med "Plot funktion" (se side 5) indtegne grafen for normalfordelingsapproksimationen $X \sim N(\mu, \sigma)$ sammen med søjlerne, som vist til højre.



En tommelfingerregel er at tilnærmelsen kan laves hvis $n \cdot p > 5$ og $n \cdot (1-p) > 5$.
En normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$ opfylder følgende:

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}45\%$
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}73\%$

Denne egenskab nedarver $X \sim b(n, p)$ omtrent, hvis den er tilnærmelsesvist normalfordelt.

Vi kalder således intervallet $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ for de *normale udfald*. Disse udgør således ca. 95% af alle udfald og svarer stort set til acceptmængden på et 5%-signifikansniveau.

Da kun 0,27% af udfaldene ligger udenfor intervallet $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ kaldes sådanne udfald som ligger mere end tre spredninger fra middelværdien for *exceptionelle*.

OVERSIGT OVER NSPIRE-KOMMANDOER

I det følgende er X en binomialfordelt stokastisk variabel $X \sim b(n,p)$ hvor andet ikke fremgår

Beskrivelse	**Kommando**
Binomialkoefficient $K(n,r)$	`ncr(n,r)`
Sandsynligheden for netop r: $P(X = r)$	`binompdf(n,p,r)`
Sandsynligheden for højest r: $P(X \leq r)$	`binomcdf(n,p,0,r)`
Sandsynligheden for mindst r: $P(X \geq r)$	`binomcdf(n,p,r,n)`
Sandsynlighed for mindst a og højest b: $P(a \leq X \leq b)$	`binomcdf(n,p,a,b)`
Mindste tal a så der gælder $P(X \leq a) > q$ (q-fraktil)	`invbinom(q,n,p)`
Største tal b så der gælder $P(X \geq b) > q$	`invbinom(1-q,n,p)`
Acceptmængde $[a; b]$ for to-sidet binomialtest på signifikansniveau S.	`a=invbinom(S/2,n,p)` `b=invbinom(1-S/2,n,p)`
Acceptmængde $[a; n]$ for en-sidet (venstresidet) binomialtest på signifikansniveau S.	`a=invbinom(S,n,p)`
Acceptmængde $[0; b]$ for en-sidet (højresidet) binomialtest på signifikansniveau S.	`b=invbinom(1-S,n,p)`
Listen ”udfald” med tal fra 0 til n.	`udfald:=seq(x,x,0,n)`
Listen ”sandsynlighed” med alle $P(X = r)$	`sandsynlighed:=binompdf(n,p)`
Listen ”sandsynlighed” med alle $P(X \leq r)$	`sandsynlighed:=binomcdf(n,p)`
Definere middelværdi $\mu = n \cdot p$ som m:	`m:=n*p`
Definere spredning $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ som s	`s:=sqrt(n*p*(1-p))`
Tæthedsfunktion for normalfordelte $X \sim N(m,s)$:	`normpdf(x,m,s)`
For $X \sim N(m,s)$ bestemmes $P(X \leq r)$:	`normcdf(-infinity,r,m,s)`
For $X \sim N(m,s)$ bestemmes $P(X \geq r)$:	`normcdf(r,infinity,m,s)`
Normale udfald: $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$	`n*p-2*sqrt(n*p*(1-p))` `n*p+2*sqrt(n*p*(1-p))`
Grænse for exceptionelle udfald: $X < \mu - 3\sigma$ eller $X > \mu + 3\sigma$	`n*p-3*sqrt(n*p*(1-p))` `n*p+3*sqrt(n*p*(1-p))`