Delprøve 2 kl. 9.00-14.00

Opgave 10 En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{0,25\cdot x} + e^{-0,50\cdot x}.$$

(10 point) a) Bestem minimum for f ved brug af $f'(x)$.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse og linjerne $x = -2$ og $x = 3$ et område M.
Når M drejes 360° omkring førsteaksen, fremkommer der et omdrejningslegeme.

(10 point) b) Bestem rumfanget af omdrejningslegemet.

(10 point) c) Bestem kurvelængden af grafen for f i intervallet $-2 \leq x \leq 3$.

Opgave 11 I en model kan koncentrationen af hæmoglobin i blodet hos kvinder beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X.
Målt i mmol/L har X middelværdien $\mu = 8,4$ og spredningen $\sigma = 0,55$.

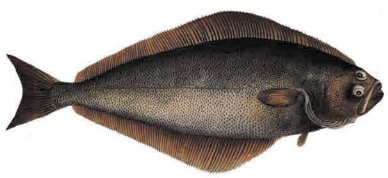
(10 point) a) Bestem de normale udfald for X.

(10 point) b) Bestem sandsynligheden $P(X \leq 8,0)$ for, at en tilfældigt udvalgt kvinde har en koncentration af hæmoglobin i blodet på højst 8,0 mmol/L.

Kilde: min.medicin.dk

Opgave 12 Den samlede biomasse af en population af helleflyndere i et område af Stillehavet kan beskrives ved modellen

$$\frac{dy}{dx} = 0,71 \cdot \left(1 - \frac{y}{80,5}\right) \cdot y,$$



Billedkilde: Wikipedia

hvor $y = f(x)$ er populationens samlede biomasse (målt i mio. kg), og x er tiden (målt i år).
Til tidspunktet $x = 0$ er den samlede biomasse 20,1 mio. kg.

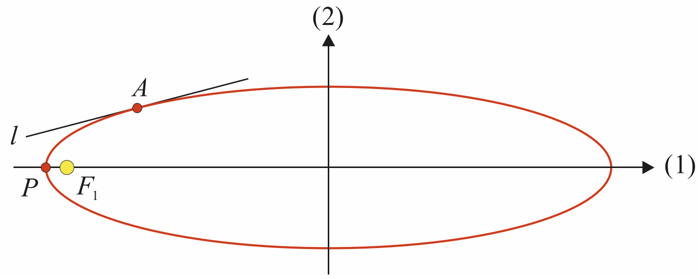
(10 point) a) Med hvilken hastighed vokser den samlede biomasse til tidspunktet $x = 0$?

(10 point) b) Bestem et udtryk for den samlede biomasse $f(x)$.

(10 point) c) Til hvilket tidspunkt når den samlede biomasse op på 75 mio. kg?

Opgave 13

Kometen Halley
Billedkilde: NASA



Kometen Halleys ellipseformede bane er indtegnet i et koordinatsystem.
Ellipsens centrum er (0, 0).

Ellipsen på figuren viser en model af kometen Halleys bane om Solen.
Solen befinder sig i det ene brændpunkt F_1. Ellipsens halvakser er 17.8 og 4.53.
Alle længdemål er angivet i AE (astronomiske enheder).

(10 point) a) Bestem en ligning for tangenten l til ellipsen i punktet $A(-14.24, 2.718)$.

I positionen P er kometen tættest på Solen. Se figuren.

(10 point) b) Bestem afstanden $|PF_1|$.

Opgave 14 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = x^2 - 8x - y^2 + 2y + 19.$$

(10 point) a) Tegn grafen for f i grafvinduet $[-5;10]\times[-5;10]\times[-5;10]$.

Grafen for f har et saddelpunkt i $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

(10 point) b) Bestem koordinatsættet til P.

(10 point) c) Gør rede for, at enhver snitkurve for f i x-retningen bliver en parabel, når y holdes fast.

Delprøve 2 kl. 9.00-14.00

Opgave 9 En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - e^t + 2 \\ -t^3 - e^{-t} + 4 \end{pmatrix} \quad , \qquad -2 \le t \le 2 \; .$$

(10 point) a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$.

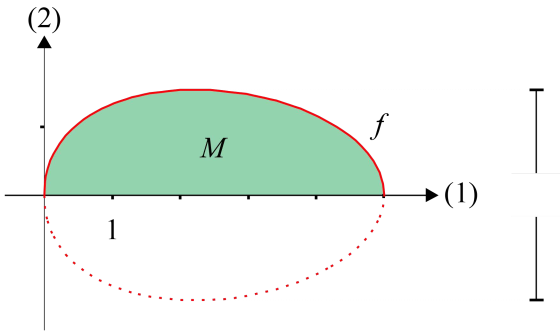
(10 point) b) Bestem t-værdien for det punkt, hvor parameterkurven for $\vec{s}$ skærer andenaksen.

Opgave 10 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 1{,}2 \cdot \left(\sqrt{5} \cdot x - x^{1{,}5}\right)^{0{,}5} \quad , \text{ hvor } 0 \le x \le 5 \, .$$

(10 point) a) Løs ligningen $f(x) = 0$.

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen et område M.



I en model kan formen af et æg beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres 360° omkring førsteaksen i et koordinatsystem med enheden cm på begge akser.

(10 point) b) Benyt modellen til at bestemme rumfanget af ægget.

(10 point) c) Benyt modellen til at bestemme bredden b af ægget.

Opgave 11 Tabellen viser vingelængden, målt i tiendedele millimeter, for 100 stuefluer.

Vingelængde	36	41	…	50	55

Alle tabellens 100 data findes i den vedhæftede fil: vingelængde.xlsx

(10 point) a) Gør rede for, at vingelængderne med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X.

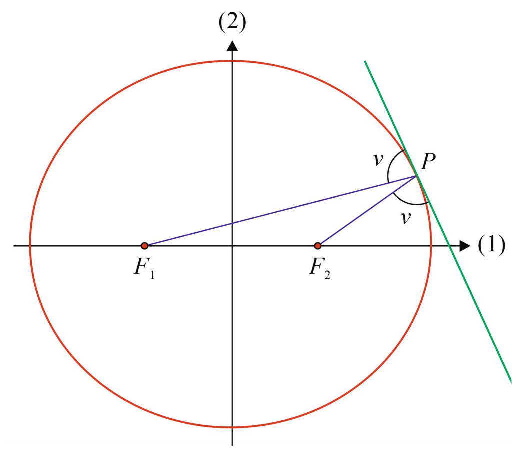
(10 point) b) Bestem $P(X \ge 52)$.

(10 point) c) Hvilke af de 100 vingelængder er ikke normale udfald?

Kilde: Sokal, R.R., and P.E.Hunter. 1955

Opgave 12

Figur 1



Figur 2

Loop, en form for Pool, spilles på et ellipseformet bord (se figur 1).

I en model er det grønne spilområde afgrænset af en ellipse med centrum i (0, 0), se figur 2. Ellipsens storakse er 130 cm, og lilleaksen er 118 cm.

(10 point) a) Bestem en ligning på normalform for denne ellipse.

Punktet P på ellipsen har koordinaterne $\left(60, \frac{295}{13}\right)$.

(10 point) b) Bestem en ligning for tangenten til ellipsen i P.

En kugle afsendt fra brændpunktet F_1 reflekteres i tangenten til ellipsen i P og sendes tilbage til det andet brændpunkt F_2, hvor der er et hul i bordet (se figur 2).

(10 point) c) Bestem den spidse vinkel v mellem tangenten og linjen gennem P og brændpunktet F_2.

Billedkilde: homecrux.com

Opgave 13 Når en bestemt type brusetablet bliver opløst i vand, kan rumfanget $V(t)$ af tabletten (målt i cm3) i en model beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dV}{dt} = -1{,}1 \cdot V^{\frac{2}{3}},$$

hvor t er tiden (målt i minutter), efter at tabletten er lagt ned i vandet. Det oplyses, at $V(0) = 0{,}44$.

Billedkilde: Colourbox

(10 point) a) Bestem en forskrift for $V(t)$

En anden brusetablet er lidt større. Udviklingen i rumfanget af den store tablet, når den er blevet lagt ned i vandet, kan beskrives ved samme model som ovenfor.
Den store tablet er opløst efter 2,3 minutter.

(10 point) b) Bestem rumfanget af den store tablet, inden den blev lagt ned i vandet.

Delprøve 2 kl. 9.00-14.00

Opgave 9 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 9x^2 \cdot \ln(x) .$$

(10 point) a) Bestem den stamfunktion F til f, hvis graf går gennem punktet $P(1, 10)$.

Opgave 10 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

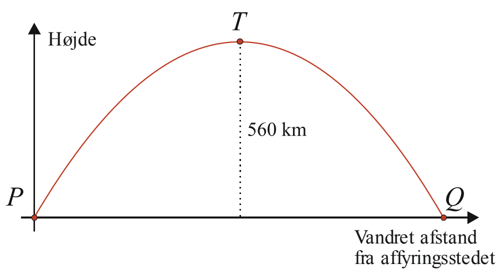
$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 2 \cdot t^2 \\ t - 1 \end{pmatrix} .$$

(10 point) a) Tegn banekurven for $\vec{s}$.

(10 point) b) Bestem koordinatsættet til hastighedsvektoren for $t = 2$.

(10 point) c) Bestem de t-værdier, hvor hastighedsvektoren står vinkelret på vektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Opgave 11 Under den kolde krig anvendtes en bestemt type mellemdistanceraketter med en rækkevidde $|PQ|$ på 2400 km og en maksimal højde på 560 km.
Rakettens bane kan beskrives som graf for et andengradspolynomium



$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

hvor x er den vandrette afstand fra affyringsstedet (målt i km), og $f(x)$ er rakettens højde over jorden (målt i km).

(10 point) a) Bestem en forskrift for f.

(10 point) b) Bestem kurvelængden af grafen fra P til Q.

Opgave 12 En funktion af to variable er givet ved

$$f(x, y) = (x-4)^2 - (y-1)^2 + 4 .$$

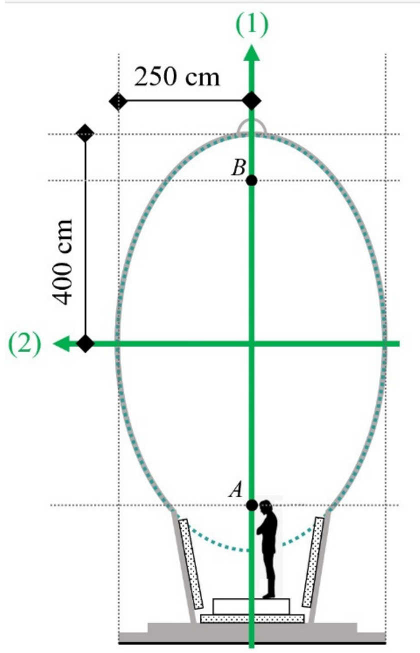
(10 point) a) Tegn grafen for f i vinduet $[-5;10] \times [-5;10] \times [-5;10]$.

Funktionen f har ét stationært punkt P.

(10 point) b) Bestem koordinatsættet til P.

Opgave 13

Figur 1
Billedkilde: Architectenweb



Figur 2

Billedet på figur 1 viser lydinstallationen ”Klankkaatser” i Amsterdam. Installationen har et lodret tværsnit, der er ellipseformet. Der er på figur 2 indlagt et koordinatsystem med enheden cm på begge akser. Ellipsens halvakser fremgår af figuren.

(10 point) a) Bestem en ligning for ellipsen.

Punkterne A og B er ellipsens brændpunkter. Fra punktet B udsendes svag lyd, som tydeligt kan høres af en person i punktet A.

(10 point) b) Bestem koordinatsættet til hvert af punkterne A og B.

Opgave 14 I en model (model 1) beskriver man udviklingen i Jordens befolkningstal ved differentialligningen

$$p' = 0{,}015 \cdot p^{1{,}2} ,$$

hvor $p(x)$ er befolkningstallet (målt i mia.) x år efter 1990.
I 1990 var befolkningstallet 5,28 mia.

(10 point) a) Med hvilken hastighed voksede befolkningstallet i 1990 ifølge modellen.

(10 point) b) Bestem befolkningstallet i 2030 ifølge modellen.

I en anden model (model 2) beskrives Jordens befolkningstal ved forskriften

$$f(x) = 5{,}28 \cdot e^{0{,}015 \cdot x} ,$$

hvor $f(x)$ er befolkningstallet (målt i mia.) x år efter 1990.

(10 point) c) I hvilket år vil befolkningstallet blive 50 % større ifølge model 1,
end det vil blive ifølge model 2?