

Taltyper

Tal er selvfølgelig helt centrale i matematik. De ti cifre fra 0 til 9 er den mest velkendte måde at repræsentere tal på, og de gør os i stand til at udtrykke alt fra de uendeligt små til de uendeligt store størrelser. Vi lærer først at bruge tallene til at tælle med og senere til at regne med. Læren om tal kaldes for *aritmetik* og handler om de regneoperationer, vi kender: plus, minus, gange og dividere samt roduddragning og potensopløftning.

Vi kan inddеле tallene i forskellige typer, som kan omtales ved hjælp af mængder. En mængde er en samling af tal, som vi skriver med et par af krøllede parenteser. F.eks. kan mængden af ulige tal mellem 10 og 20 skrives som $\{11, 13, 15, 17, 19\}$. Den første og mest basale type af tal er tællertallene, som vi kalder for de *naturlige tal*.

Definition 1.1: Naturlige tal

Mængden af de naturlige tal betegner vi med $\mathbb{N}$. Den består af alle hele positive tal, og vi skriver således:
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

De naturlige tal kan udvides med 0 og de negative heltal, og på den måde får man mængden af *hele tal*.

Definition 1.2: Hele tal

Mængden af de hele tal betegnes med et $\mathbb{Z}$. Den består af alle negative og positive heltal samt 0: $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Det er nemt at komme på tal, der ikke ligger i mængden af hele tal. Det kunne f.eks. være brøken $\frac{1}{4}$ eller decimaltallet $-2,35$. Når vi tilføjer disse typer af tal til de hele tal, får vi de *rationale tal*. Ratio betyder brøk, og derfor kan man også benævne disse tal brøktallene.

Definition 1.3: Rationale tal

Mængden af de rationale tal udgøres af ethvert tal, der kan udtrykkes som en brøk $\frac{p}{q}$, hvor p er et heltal, og q er et heltal forskelligt fra 0. De rationale tal betegnes $\mathbb{Q}$.

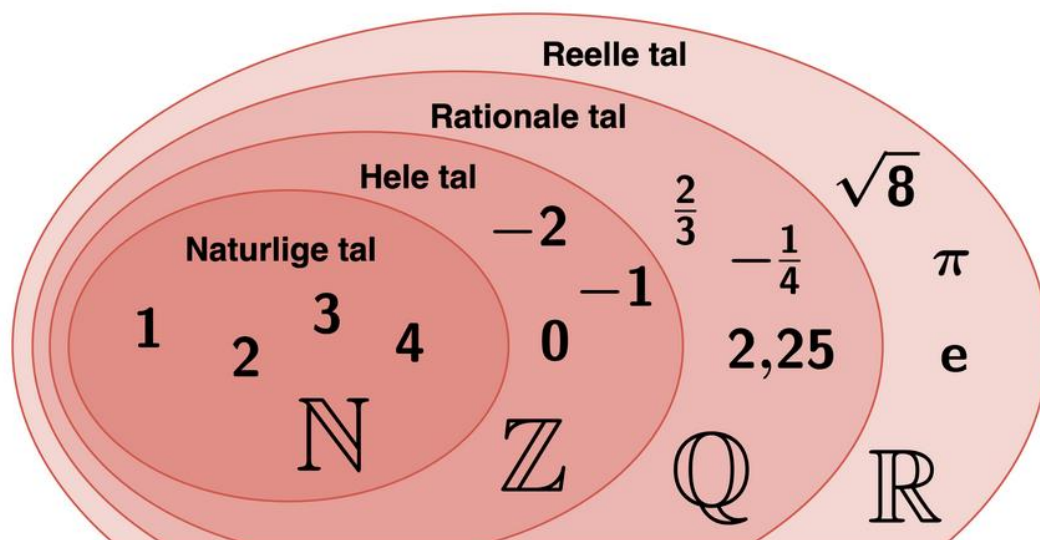
Der findes tal, der ikke kan udtrykkes som brøker. Det drejer sig blandt andet om konstanterne π (pi) og e (Eulers tal), samt om langt de fleste rødder, f.eks. $\sqrt{2}$ eller $\sqrt{10}$. Fordi disse tal ikke kan udtrykkes ved brøker, kalder vi dem for irrationale tal. Udvider vi de rationale tal med disse størrelser, får vi de *reelle tal*. De reelle tal er groft sagt alle de tal, vi kan komme i tanke om.

Definition 1.4: Reelle tal

Mængden af de reelle tal udgøres af de rationale og de irrationale tal. De reelle tal betegnes $\mathbb{R}$.

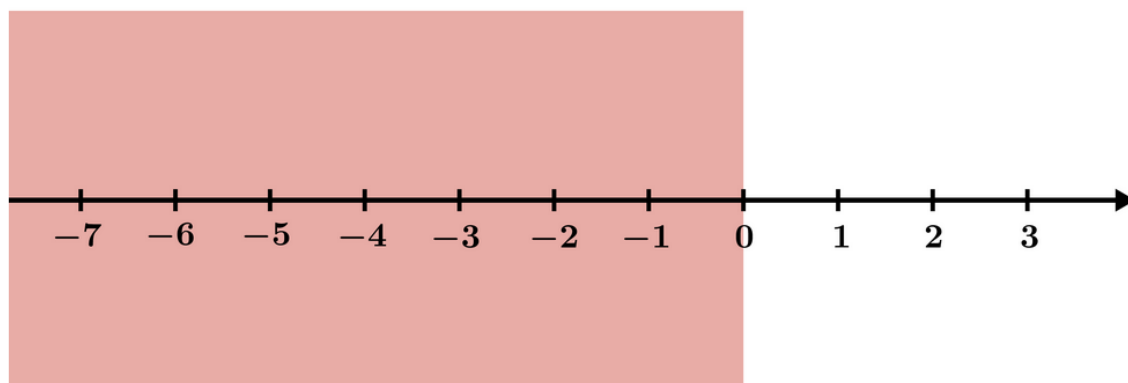


Da hver taltype opstår som en udvidelse af den forrige taltype, vil de naturlige tal være en delmængde af de hele tal, som så igen er en delmængde af de rationale tal, osv. Dette ses illustreret på billedet herunder.

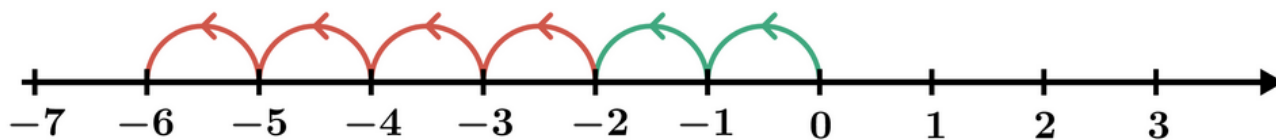


Negative tal

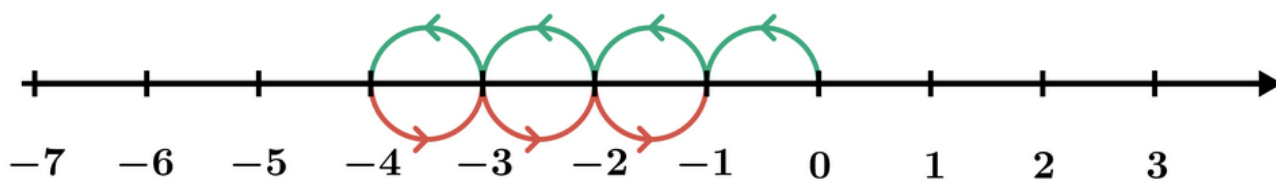
De negative tal er alle tal, som er mindre end 0. Har vi 500 kr. stående på en bankkonto og bruger 700 kr. på et par nye sko, har vi -200 kr. tilbage - vi skylder altså 200 kr. At tænke på negative tal som gæld kan være brugbart, ligesom man kan tænke på, hvad der sker på termometeret, når temperaturen falder til under 0 grader. Det er et tals *fortegn*, der afgør om tallet er positivt eller negativt, og de negative tal har altså et minus stående foran sig. På en tallinje ligger de negative tal til venstre for 0, som det ses på illustrationen her.



Når vi skal regne med negative tal, kan det i begyndelsen være godt at se på en tallinje, hvor det at lægge til svarer til at gå til højre på tallinjen, mens det at trække fra svarer til at gå til venstre på tallinjen. Skal vi foretage udregningen $-2 - 4$, skal vi altså først gå to skridt til venstre (markeret med grøn), og herefter yderligere fire skridt til venstre (markeret med rød).



Hermed får vi $-2 - 4 = -6$. Det giver også god mening, hvis vi tænker på et termometer, hvor temperaturen først er -2 grader og herefter falder yderligere 4 grader. Modsat skal man med udregningen $-4 + 3$ begynde med at gå fire til venstre (markeret med grøn) og herefter gå tre til højre i positiv retning (markeret med rød).



Heraf kan man se, at $-4 + 3 = -1$. Bytter vi rundt på tallene -4 og $+3$, så der står $3 - 4$, kan man se, at vi lander samme sted - vi er bare gået ruten derhen i en anden rækkefølge. Multiplikation og division med negative tal vender vi tilbage til i afsnittet om regningsarterne.

Decimaltal

En måde at opskrive tal, som ikke er heltal, er ved hjælp af decimaler. Vi har brug for decimaltallene, da ikke alle størrelser kan udtrykkes ved hjælp af de hele tal. Det ser vi hele tiden eksempler på, når vi måler noget, vejer bland-selv slik, fylder benzin på bilen, osv. I et decimaltal står heltalsdelen til venstre for decimalkommaet, mens brøkdelen - dvs. det der er mindre end 1 - står til højre for decimalkommaet.

Eksempel 1.1: Titalssystemet

I tallet 81,739245 angiver

8 antallet af 10'ere

1 antallet af 1'ere

7 antallet af tiendedele

3 antallet af hundrededele

9 antallet af tusindedele:

osv.

Dvs. at tallet kan skrives som en sum af heltal og brøker:

$$81,73924056 = 8 \cdot 10 + 1 \cdot 1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{4}{100000} + \frac{5}{1000000}$$

Mens et tal som 4,398 let kan omskrives til brøken $\frac{4398}{1000}$, er det ikke altid så let at gå den anden vej. F.eks. er brøken $\frac{18}{13}$ lig med decimaltallet 1,384615384615384615..., og her har vi faktisk brug for uendelig mange decimaler for at opskrive tallet præcist. Ser man lidt nærmere på decimaltallet, kan man se, at der er et mønster i tallet, og at det er de samme seks cifre, der gentages igen og igen. Dette bruger man en særlig notation til, hvor man tegner en streg over de seks cifre, der gentages i det uendelige: $\frac{18}{13} = 1,\overline{384615}$. På samme måde får vi, at $\frac{1}{3} = 0,\overline{33}$.

Mens de decimaltal, der kan omskrives til brøker, kaldes for rationale tal, findes der også decimaltal med uendelig mange decimaler, hvor der ikke er et mønster i decimalerne. Disse kalder vi, som tidligere nævnt, for irrationale tal, og to eksempler på sådanne tal er konstanterne π (pi) og e (Eulers tal), som vi støder på rigtig mange steder i forbindelse med gymnasiematematikken. Disse to tal har uendelig mange decimaler, og der er ingen systematik i decimalerne.

$$\pi = 3,141592653589793238462643383279...$$

$$e = 2,718281828459045235360287471352...$$