



BØRNE- OG
UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik B

Højere forberedelseseksamen

Ny ordning

Forberedelsesmateriale

Forord

I undervisningsforløbet skal der ifølge læreplanen *afsættes 6 timers undervisningstid til forberedelse til den skriftlige prøve i faget, jf. pkt. 4.2, hvor eleverne selvstændigt arbejder med et centralt stillet forberedelsesmateriale under vejledning.*

Dette er uddybet i vejledningen: *Hvert år i løbet af september offentliggøres forberedelsesmateriale til den skriftlige eksamen. Materialet indgår ikke som en del af det supplerende stof i forløbet, men det kan inddrages ved mundtlig eksamen, hvis et hold ønsker det.*

I dette forberedelsesmateriale er emnet ”Vektorer”.

Materialet indeholder teori, eksempler, øvelser, eksperimenter og opgaver.

Ved den skriftlige eksamen kan indhold og metoder fra forberedelsesmaterialet indgå i opgaver i begge delprøver. Eksaminanderne bør medbringe resultaterne af arbejdet med dette materiale til brug ved delprøve 2. Hvis der til delprøve 1 kræves kendskab til særlige definitioner og formler, vil der være et indstiksark til formelsamlingen.



Opgaverne markeret med et tastatur kan kun forekomme i delprøve 2.



Opgaverne markeret med hånd og blyant kan forekomme i begge delprøver.

Hf matematik B

Forberedelsesmateriale

Vektorer

December 2019, maj/juni 2020 og august 2020

Indhold

Indledning.....	2
1. Hvad er en vektor?	3
2. Vektorers koordinater.....	4
3. Vektorers længde.....	6
4. Stedvektor og forbindelsesvektor.....	9
5. Regning med vektorer	12
6. Parameterfremstilling for en ret linje	17
Bilag 1. Vejledning til vektorer i GeoGebra	27
Bilag 2. Vejledning til vektorer i Nspire	28
Bilag 3. Indstiksark til formelsamlingen	①

Indledning

Dette forberedelsesmateriale handler om *vektorer*.

I forberedelsesmaterialet er der både eksempler, øvelser, eksperimenter og opgaver. Øvelserne er tænkt som hjælp til forståelse af teorien og metoderne. Opgaverne er tænkt som forberedelse til de opgaver, der kommer til den skriftlige eksamen. Det anbefales at arbejde med øvelser og eksperimenter tidligt i forløbet som et led i opbygningen af forståelsen. På et senere tidspunkt i forløbet og ved eksamenslæsning kan man koncentrere sig om at læse den egentlige tekst.

Øvelser og eksperimenter er markeret med blå margenlinje.

Eksempler er markeret med grøn margenlinje.

Opgaver er markeret med rød margenlinje.

Vigtige definitioner og sætninger er markeret med en sort ramme om teksten.

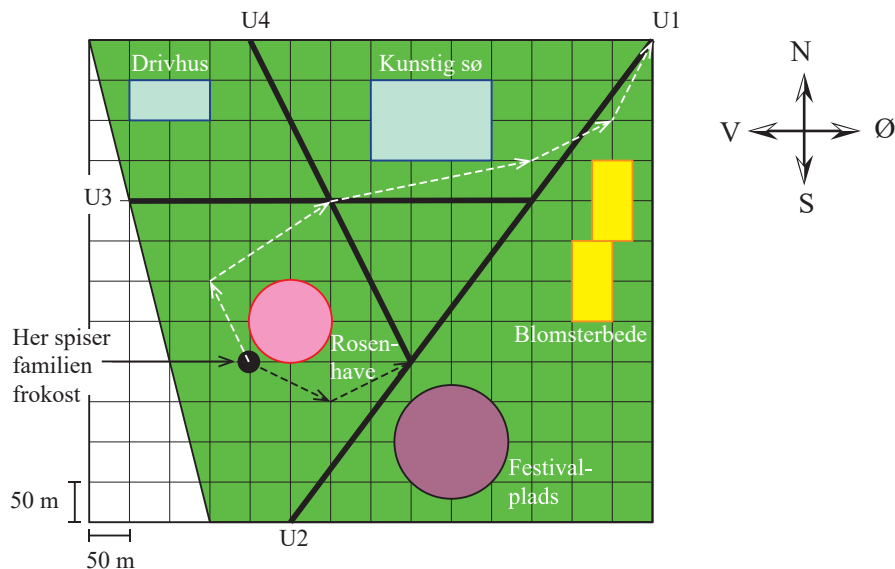
Arbejdet med forberedelsesmaterialet forudsætter brug af et computerbaseret matematisk værktøjsprogram med CAS. I dette materiale omtales det blot som et CAS-værktøj.

1. Hvad er en vektor?

Helt centralt i dette materiale er begrebet en *vektor*. I dette afsnit beskrives og undersøges dette begreb. Vi lægger ud med et eksempel.

Eksempel 1

På figur 1 ses et kort over Byparken i en større dansk by. Der er fire udgange fra parken U1, U2, U3 og U4. De kraftige sorte linjer på figuren er stier.



Figur 1

En familie har spist frokost i Byparken i nærheden af Rosenhaven og vil nu gå til udgang 1 (U1). Børnenes rute er markeret med hvide stiplede pile på figur 1. Forældrenes rute er markeret med sorte stiplede pile, indtil de når den sorte sti, som de så følger resten af vejen til udgang U1.

Øvelse 1

- Hvor langt løber børnene? Hvor langt går forældrene?
1 tern på figur 1 svarer til 50 m. Tæl tern, og giv et overslag over længden af de to ruter.
- Tegn selv en rute. Man må kun bevæge sig i rette linjer og må kun skifte retning i gitterpunkterne på figur 1. Hvor lang er jeres rute?

Øvelse 2

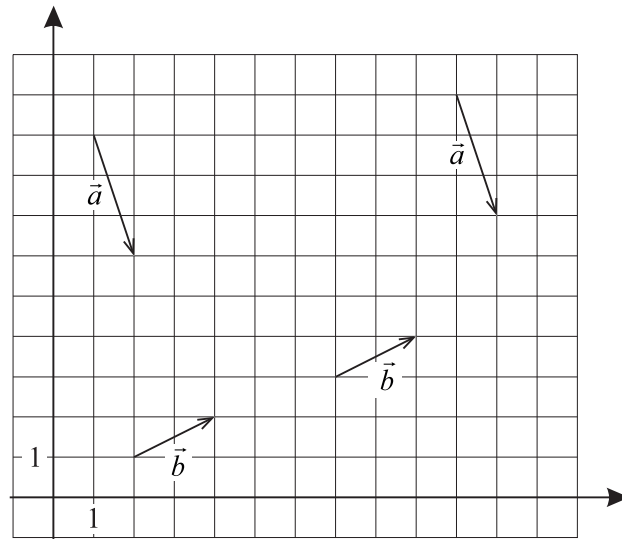
Forældrenes rute kan beskrives som 2 tern mod øst og 1 tern mod syd, derefter 2 tern mod øst og 1 tern mod nord. Til sidst 6 tern mod øst og 8 tern mod nord.

- Beskriv på samme måde børnenes rute.
- Beskriv jeres egen rute.

Pilene på figur 1 angav hver især en retning og en længde for en del af ruten ud af Byparken.

En sådan pil kaldes en *vektor*, og man navngiver den med et lille bogstav med en pil over: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ osv. Bemærk, at den anden pil på forældrenes rute og den fjerde pil på børnenes rute faktisk er den samme vektor (2 tern mod øst og 1 tern mod nord).

2. Vektorers koordinater



Figur 2

Hver af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ på figur 2 er lagt ind to forskellige steder i koordinatsystemet:

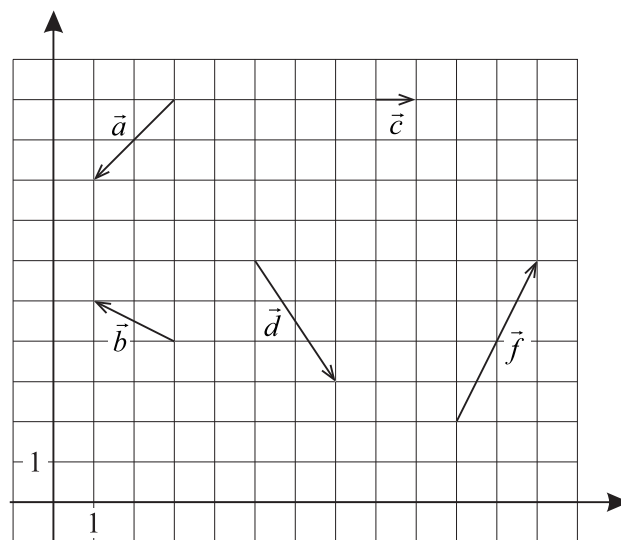
- Vektor $\vec{a}$ kan beskrives som +1 tern i x-aksens retning og -3 tern i y-aksens retning.
- Vektor $\vec{b}$ kan beskrives som +2 tern i x-aksens retning og +1 tern i y-aksens retning.

Vi skriver de to tal lodret under hinanden i en parentes, som angiver *vektorenes koordinatsæt*:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bemærk, at vektorers koordinater skrives lodret som vist ovenfor, mens punkters koordinater skrives vandret, fx $A(1,2)$.

Øvelse 3

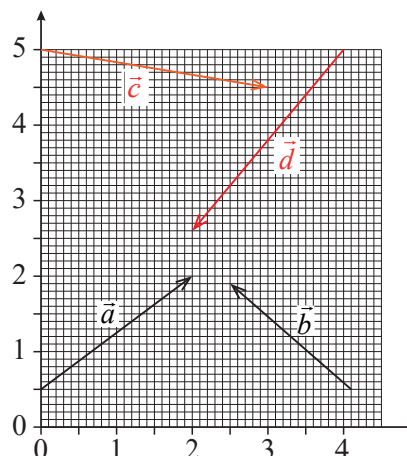


Figur 3

a) Aflæs koordinatsættet til hver af de fem vektorer på figur 3.

Vektorkoordinater behøver ikke at være hele tal. På figur 4 er der indtegnet fire vektorer, hvor nogle af koordinaterne ikke er hele tal. De to sorte vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har koordinatsættene:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1,6 \\ 1,4 \end{pmatrix}.$$



Figur 4

Opgave 1

- a) Aflæs koordinatsættet til hver af de to røde vektorer $\vec{c}$ og $\vec{d}$ på figur 4.

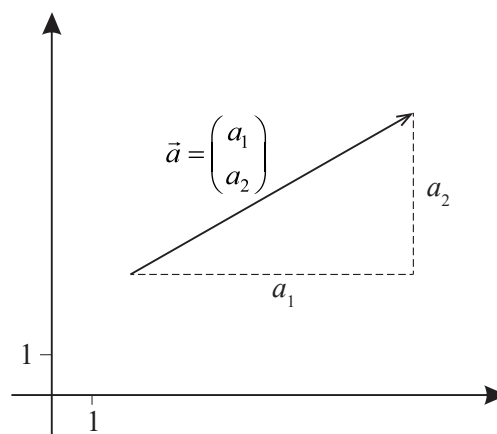


Definition 1

En vektor $\vec{a}$, der går a_1 enheder i x -aksens retning og a_2 enheder i y -aksens retning (begge regnet med fortegn), har koordinatsættet

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Nulvektoren med koordinatsættet $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ har længden 0 og ingen retning.



Figur 5

Opgave 2

- a) Tegn nedenstående vektorer i et koordinatsystem på kvadreret papir

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Du vælger selv udgangspunkt for hver af vektorerne.



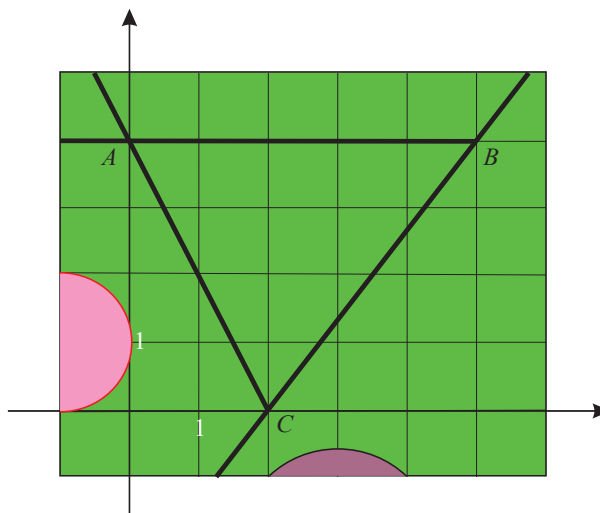
Vektorer kan også anvendes til at beskrive, hvorledes to eller flere punkter ligger i forhold til hinanden.

Øvelse 4

På figur 6 til højre ses et udsnit af Byparken. De tre steder, hvor stierne mødes, er angivet ved punkterne $A(0,4)$, $B(5,4)$ og $C(2,0)$.

Aflæs koordinaterne til vektoren, der fører

- fra A til B . Denne vektor betegnes $\overline{AB}$.
- fra B til A . Denne vektor betegnes $\overline{BA}$.
- fra A til C .
Hvad er betegnelsen for denne vektor?
- fra B til C .
Hvad er betegnelsen for denne vektor?



Figur 6

Definition 2

Forbindelsesvektoren fra A til B kaldes vektor AB og skrives $\overline{AB}$.

Der gælder, at $\overline{AB} = \overline{CD}$, hvis vektoren $\overline{AB}$ har samme længde og retning som vektoren $\overline{CD}$.

3. Vektorers længde

I øvelse 1 fandt vi et overslag over længden af pilene (dvs. vektorerne) på kortet ved at tælle tern. Længden af en vektor $\vec{a}$ betegnes $|\vec{a}|$. Nu vil vi beregne længden af en vektor, der er givet ved koordinater. Vi vender først tilbage til Byparken.

Eksempel 2

Figur 7 viser et nyt udsnit af Byparken. Vi ser på børnenes rute fra P og via Q , til de når krydset R mellem de to stier. Den første del kan beskrives med

$$\text{vektoren } \vec{a} = \overline{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

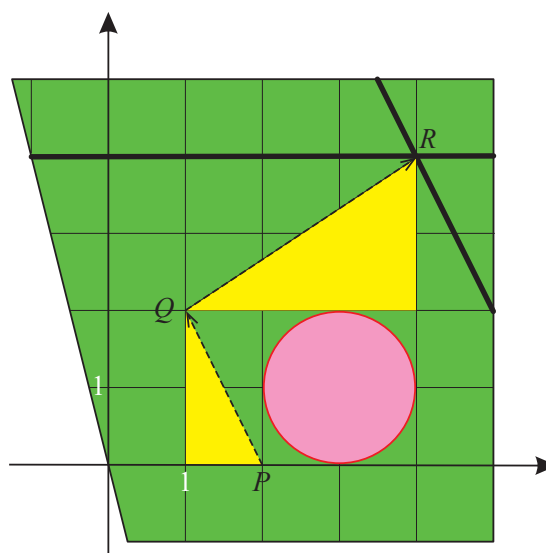
Den anden del kan beskrives med

$$\text{vektoren } \vec{b} = \overline{QR} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hvis vi ser vektorerne som hypotener i de to gule retvinklede trekanter, kan vi beregne længden af dem ved hjælp af Pythagoras' sætning.

Længden af $\vec{a}$ bliver $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2}$, fordi de to kateter har længden 1 og 2. Altså er $|\vec{a}| = \sqrt{5}$.

Længden af $\vec{b}$ bliver $|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 2^2}$, fordi de to kateter har længden 3 og 2. Altså er $|\vec{b}| = \sqrt{13}$.



Figur 7

Eksperiment 1 (CAS)

- Tegn en selvvalgt vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ i et koordinatsystem.
- Mål længden af vektoren med CAS-værktøjet.
- Beregn vektorens længde med formlen $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
Sammenlign med resultatet i b).
- Træk i vektorens endepunkt, så vektoren bliver kortere eller længere.
Giver måling og beregning af længden stadig samme resultat?
Hvad kan du konkludere?

Konklusion på eksperiment 1:

Sætning 1

Længden $|\vec{a}|$ af en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ beregnes med formlen $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

I eksempel 2 beregnede vi længden af vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ved at benytte Pythagoras' sætning på den lille gule retvinklede trekant med kateterne 1 og 2 og hypotenusen PQ :

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Bruger vi sætning 1, ser udregningen således ud:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Øvelse 5 (CAS)

- Bestem ved hjælp af formlen i sætning 1 længden af følgende vektorer:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

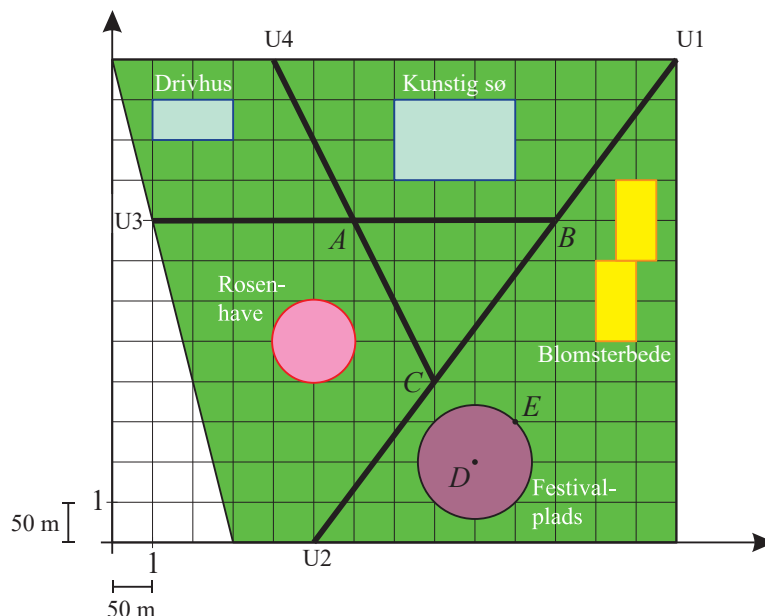
- Kontrollér resultaterne ved at tegne de tre vektorer med et CAS-værktøj og mål længden af dem.

Øvelse 6

- Undersøg, hvilke af følgende vektorer der har samme længde:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{g} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3



Figur 8: Kort over Byparken
Enheden på kortet er 50 meter.

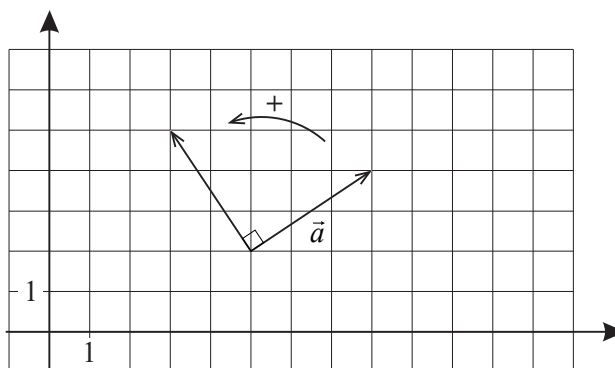
- Aflæs koordinatsættet til den vektor, der går fra udgang U2 til udgang U1.
- Hvor langt er der fra udgang U2 til udgang U1?
- Er stien fra udgang U3 til B længere end stien fra udgang U4 til C?

Øvelse 7

På figur 9 er tegnet vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Desuden er der tegnet en anden vektor med samme længde som $\vec{a}$, vinkelret på $\vec{a}$ og drejet i positiv omløbsretning.

- Bestem koordinatsættet til denne vektor.



Figur 9

Eksperiment 2 (CAS)

- Tegn en vektor $\vec{a}$ efter eget valg i CAS-værktøjet, og bestem vektorens koordinatsæt.
- Drej vektor $\vec{a}$ vinklen 90° i positiv omløbsretning med CAS-værktøjet.
- Aflæs den drejede vektors koordinatsæt.
- Gentag eksperimentet med andre vektorer.
- Hvordan ser systemet ud til at være, når du skal bestemme den drejede vektors koordinatsæt?

Definition 3 og sætning 2 afslutter eksperiment 2.

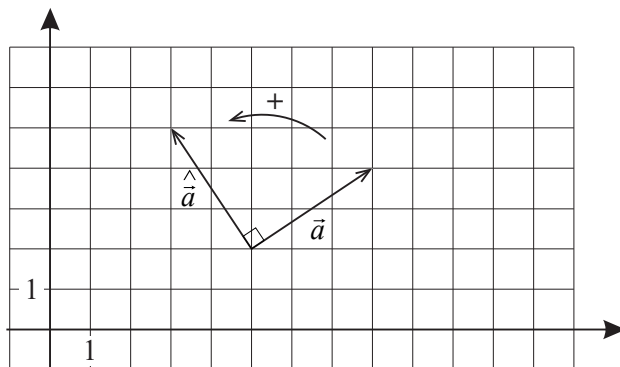
Definition 3

Tværvektoren $\hat{\vec{a}}$ står vinkelret på $\vec{a}$ og har samme længde som $\vec{a}$.

Tværvektoren $\hat{\vec{a}}$ fremkommer af vektor $\vec{a}$ ved en drejning på 90° i positiv omløbsretning.

Symbolet $\hat{\vec{a}}$ læses "a hat".

Tværvektoren omtales ofte som "hat-vektoren".



Figur 10

Sætning 2

Tværvektoren til $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ har koordinatsættet $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Øvelse 8

Der er givet tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

- Bestem ved hjælp af formlen i sætning 2 koordinatsættet til tværvektoren til hver af de tre vektorer.
- Tegn de tre vektorer og deres tværvektorer i et CAS-værktøj.
Kontrollér ved måling for alle tre vektorer, at deres tværvektor står vinkelret på vektoren og har samme længde som vektoren.

4. Stedvektor og forbindelsesvektor

Det punkt, hvor koordinatsystemets akser krydser hinanden, betegnes $O(0,0)$.

Øvelse 9 (CAS)

- Afsæt punkterne $O(0, 0)$, $B(2, 4)$ og $C(3, -1)$ i et koordinatsystem.
- Tegn vektorerne $\overrightarrow{OB}$ og $\overrightarrow{OC}$.
- Aflæs de to vektorers koordinater.
- Sammenlign vektorernes koordinater med endepunkternes koordinater.
Hvad kan du konkludere?

Definition 4

Vektoren $\overrightarrow{OA}$ fra $O(0,0)$ til $A(a_1, a_2)$ kaldes *stedvektoren* til punktet A .

Sætning 3

Stedvektoren $\overrightarrow{OA}$ til punktet $A(a_1, a_2)$ har koordinatsættet $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Eksperiment 3 (CAS)

- Indsæt punkterne $A(2, 1)$ og $B(7, 4)$ i et koordinatsystem.
- Tegn vektoren $\overrightarrow{AB}$, og aflæs denne vektors koordinatsæt.
- Træk punktet B i x -aksens retning. Hvad sker der med koordinatsættet til vektor $\overrightarrow{AB}$?
- Træk punktet B tilbage til den oprindelige position, og træk derefter i y -aksens retning. Hvad sker der med koordinatsættet til vektor $\overrightarrow{AB}$?

Eksperiment 4 (CAS)

- Afsæt punktet $A(2, 3)$ i et koordinatsystem i CAS-værktøjet.
- Tegn nedenstående vektorer med udgangspunkt i A :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$
- Aflæs koordinatsættet til hvert af endepunkterne B , C og D .
- Gentag øvelsen med tre andre selvvalgte vektorer med udgangspunkt A .
- Hvilken sammenhæng er der mellem koordinaterne til udgangspunktet og endepunktet?

Vink: Skab overblik med skemaer som nedenstående

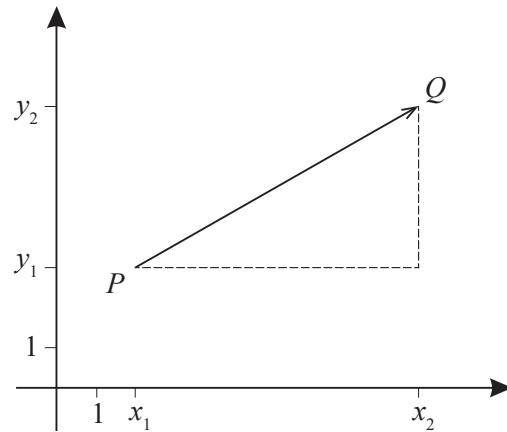
	Vektor	Udgangspunkt	Endepunkt
	$\overrightarrow{AB}$	A	B
x -koordinat	3	2	5
y -koordinat	1	3	4

Sætning 4

To punkter er givet ved $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$.

Forbindelsesvektoren $\overrightarrow{PQ}$ har da

koordinatsættet $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$.



Figur 11

Øvelse 10

Der er givet tre punkter $A(2,1)$, $B(6,4)$ og $C(9,-2)$.

- Bestem koordinatsættene til vektorerne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AC}$ ved hjælp af formelen i sætning 4.
- Afsæt de tre punkter i et koordinatsystem, og tegn de tre vektorer.
- Kontrollér dit resultat i a) ved at aflæse vektorernes koordinater på tegningen.

Opgave 4

Der er givet tre punkter $A(3,7)$, $B(-1,2)$ og $C(6,-1)$.

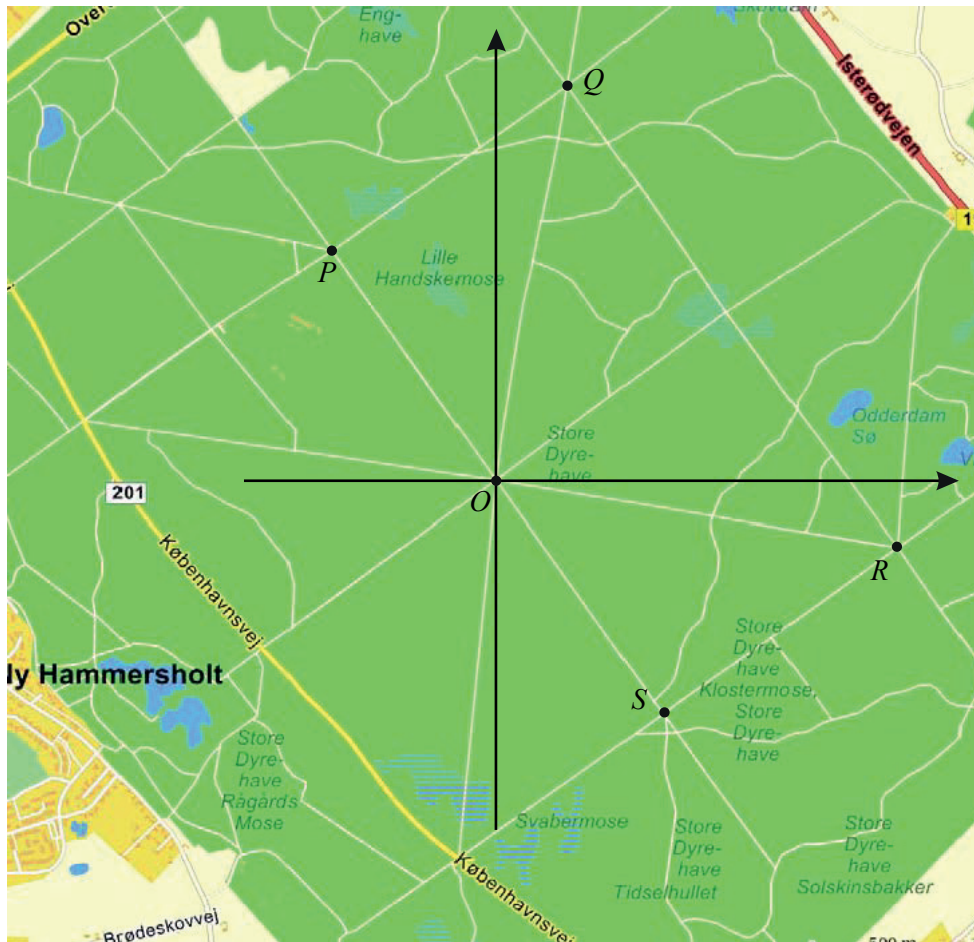
- Beregn koordinatsættene til vektorerne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AC}$.
- Afsæt de tre punkter i et koordinatsystem, og tegn de tre vektorer.



5. Regning med vektorer

Vi skal i dette afsnit indføre nogle regneregler for vektorer. Vi starter med et eksempel.

Eksempel 3



Figur 12 (Billedkilde: Krak)

Figur 12 viser et kort over et stjerneformet stisystem i Store Dyrehave i Hillerød lagt ind i et koordinatsystem. Det oplyses, at punkterne, der er angivet på figuren, har koordinatsættene:

$$O(0, 0), P(-5, 7), Q(2, 12), R(12, -2) \text{ og } S(5, -7).$$

Maya løber fra O til P og derefter fra P til Q . Hendes rute kan beskrives ved

$$\text{først } \vec{a} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ og dernæst } \vec{b} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 - (-5) \\ 12 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Victor løber fra O direkte til Q . Hans rute kan beskrives med $\vec{c} = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Vi ser, at de begge to starter i punktet O og ender i punktet Q . Vi ser også, at Mayas rute kan beskrives med $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \vec{c}$, som netop beskrev Victors rute.

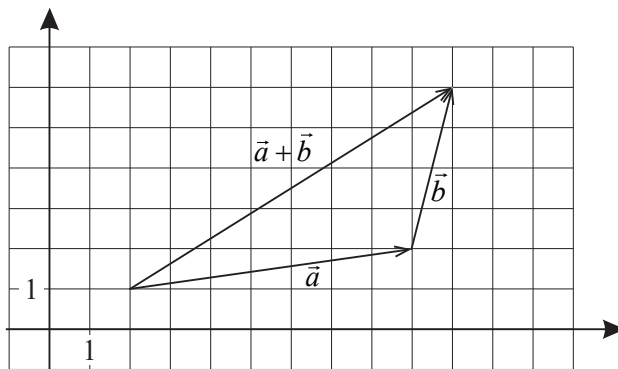
Sætning 5

Sumvektoren $\vec{a} + \vec{b}$ af vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

har koordinatsættet

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$



Figur 13

Geometrisk betyder sum af to vektorer, at de to vektorer lægges i forlængelse af hinanden. Sumvektoren er den vektor, der går fra den første vektors begyndelsespunkt til den anden vektors endepunkt.

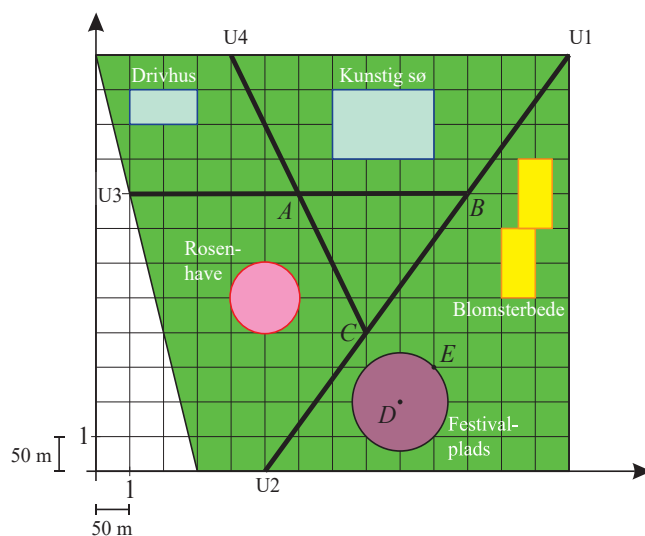
Øvelse 11

Der er givet tre vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Beregn koordinatsættet til sumvektorerne $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} + \vec{c}$ og $\vec{w} = \vec{b} + \vec{c}$ ved hjælp af formelen i sætning 5.
- Tegn i hvert af de tre tilfælde de to vektorer sammen med deres sumvektor – på samme måde som på figur 13. Brug kvadreret papir.

Opgave 5

- Beskriv ved hjælp af en passende sum af vektorer en rute fra udgang U3 ad stien til punkt A, videre fra A til C og til sidst fra C til udgang U1.



Figur 14

Eksempel 4

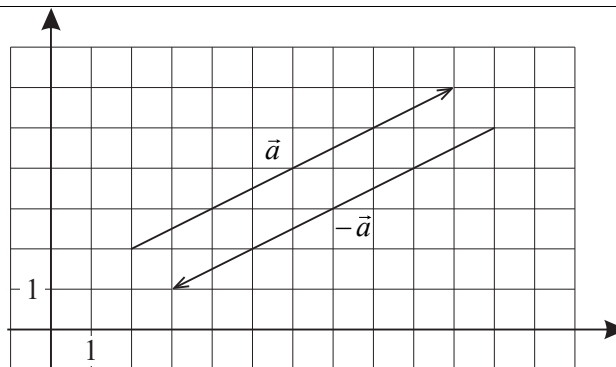
Casper går fra O til S (se figur 12) og derefter tilbage igen. Hans rute kan beskrives ved vektoren

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ og derefter vektoren } \overrightarrow{SO} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}. \text{ Kaldes } \vec{c} = \overrightarrow{OS}, \text{ fås } \overrightarrow{SO} = -\vec{c} = -\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Sætning 6

$-\vec{a}$ kaldes den modsatte vektor til $\vec{a}$.

Når $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, er $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$.



Figur 15

Eksempel 5

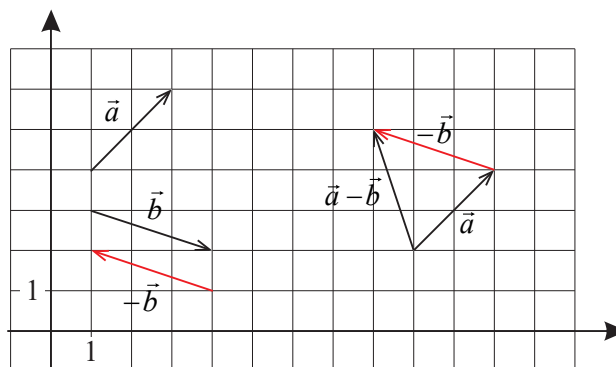
Sascha går først fra S til P (se figur 12) og derefter fra P tilbage til O . Hendes rute kan beskrives som først vektor $\vec{d} = \overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} -5-5 \\ 7-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \end{pmatrix}$ og dernæst tilbage med vektor $-\vec{a} = \overrightarrow{PO} = \begin{pmatrix} -(-5) \\ -7 \end{pmatrix}$.

Altså $\vec{d} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(-5) \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (-5) \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{d} - \vec{a}$.

Sætning 7

Differensvektoren $\vec{a} - \vec{b}$ beregnes ved at trække koordinaterne for vektor $\vec{b}$ fra koordinaterne for vektor $\vec{a}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}.$$



Figur 16

Når man trækker en vektor $\vec{b}$ fra en vektor $\vec{a}$, gør man det ved at lægge $\vec{b}$'s modsatte vektor til $\vec{a}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Øvelse 12

Der er givet tre vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Beregn koordinatsættet til differensvektorerne $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{c}$ og $\vec{w} = \vec{b} - \vec{c}$ ved hjælp af formelen i sætning 7.
- Tegn i hvert af de tre tilfælde de to vektorer sammen med deres differensvektor – på samme måde som på figur 16. Brug kvadreret papir.

Eksempel 6

Hussein går en tur fra O til R (se eksempel 3, figur 12). Mille går en også en tur fra O i retning mod R , og hun går dobbelt så langt som Hussein.

Husseins rute kan beskrives med vektoren

$$\vec{c} = \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Mille går dobbelt så langt, og hendes rute kan beskrives ved

$$2 \cdot \vec{c} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

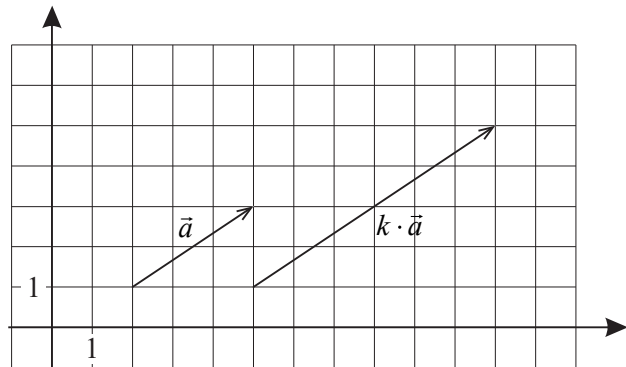
Sætning 8

Når man ganger en vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

med et tal k , ganger man vektorens koordinater med k :

$$k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}.$$



Figur 17

Vektor $k \cdot \vec{a}$ er k gange så lang som $\vec{a}$ og har samme retning, hvis k er et positivt tal og modsat retning, hvis k er et negativt tal.

Øvelse 13 (CAS)

Der er givet tre vektorer

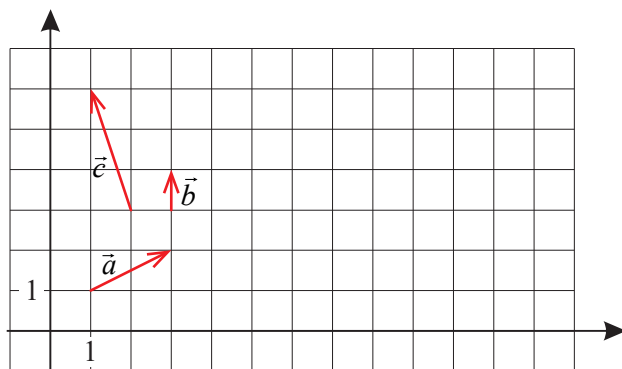
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Tegn disse tre vektorer i et koordinatsystem med et CAS-værktøj.
- Benyt vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ til at tegne følgende vektorer i samme koordinatsystem.

$$\vec{u} = 2 \cdot \vec{a}, \vec{v} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ og } \vec{w} = \vec{c} + 2(\vec{b} - \vec{a}).$$

- Bestem ved aflæsning koordinatsættene til vektorerne $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

Opgave 6



Figur 18

På figur 18 er der tegnet tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.

- Benyt disse vektorer til at tegne vektoren $\vec{u} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
- Benyt disse vektorer til at tegne vektoren $\vec{v} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$.

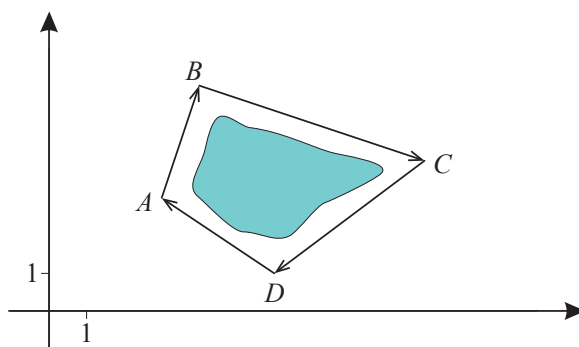
Øvelse 14

Der er givet tre vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Bestem ved hjælp af formlerne i sætningerne 5, 6, 7 og 8 koordinatsættene for vektorerne:

$$\vec{u} = -\vec{a}, \vec{v} = 2\vec{b} + \vec{a}, \vec{w} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ og } \vec{p} = \vec{b} - (\vec{a} - 2\vec{c}).$$

Opgave 7



Figur 19

Sven går en tur rundt om en sø. På figur 19 ses en model af ruten, som begynder og slutter i punktet A.

I et koordinatsystem beskrives rutens dele ved vektorerne

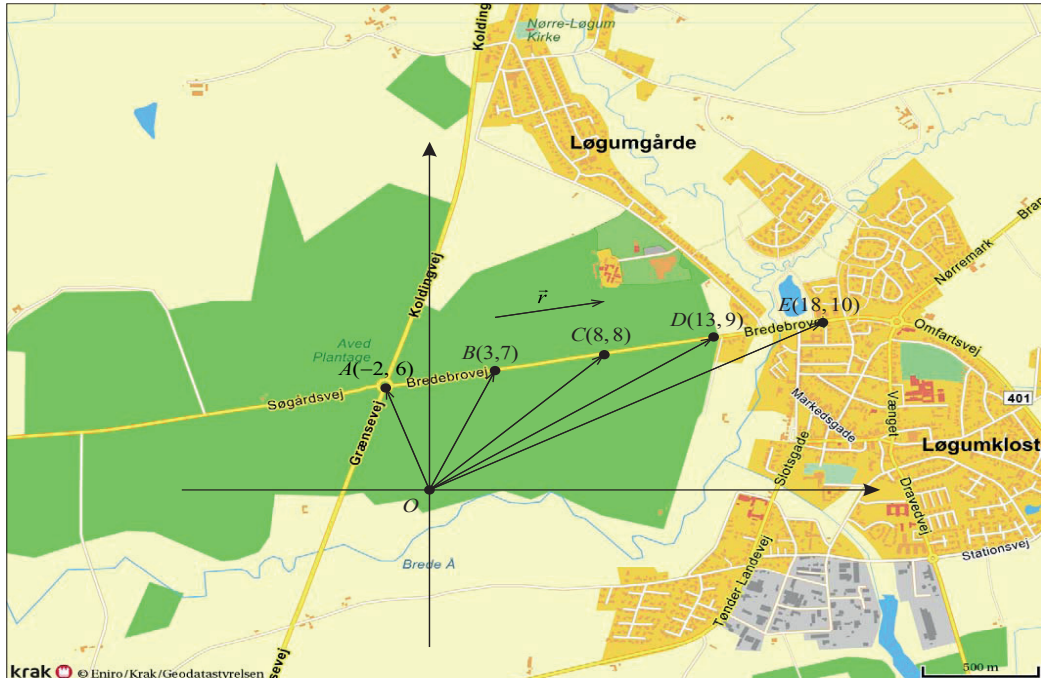
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ og } \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- Bestem koordinatsættet for vektoren $\overrightarrow{DA}$.

6. Parameterfremstilling for en ret linje

I dette afsnit skal vi anvende vektorer til at beskrive retlinjede bevægelser i et koordinatsystem. Vi begynder med et eksempel.

Eksempel 7



Figur 20 (Billedkilde: Krak)

På figur 20 ses et kort over et område ved Løgumkloster og Løgumgårde lagt ind i et koordinatsystem.

Anders kører hjem fra arbejde med en kollega og bliver sat af ved rundkørslen markeret med punktet $A(-2, 6)$.

Han går det sidste stykke fra A til sit hjem, der er markeret med punktet $E(18, 10)$.

Vejen, han går på, er helt lige og parallel med vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi kalder $\vec{r}$ for en *retningsvektor*.

Han har 2 km hjem fra A til E , og det tager 24 minutter at gå denne tur.

Retningsvektoren $\vec{r}$ angiver, hvor langt og i hvilken retning han går på 6 minutter.

Vi vil nu beskrive hans rute ved hjælp af vektorer.

Han begynder sin gåtur i punktet A , som har stedvektoren $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Efter 6 minutter er han nået til punktet B , som kan beskrives ved stedvektoren

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Efter 12 minutter er han nået til punktet C , som kan beskrives ved stedvektoren

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Øvelse 15 (fortsættelse af eksempel 7)

- a) Beskriv på samme måde punktet D og punktet E , som Anders når frem til efter henholdsvis 18 minutter og 24 minutter.

Ethvert punkt $P(x, y)$ på Anders' gåtur hjem kan beskrives ved en stedvektor

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \text{ er et tal.}$$

Eksempel 8

På figur 21 er tegnet den rette linje l med ligningen

$$y = 2 \cdot x + 3.$$

Vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ er retningsvektor for linjen l , fordi

linjens hældningskoefficient er 2 (1 til højre og 2 op).

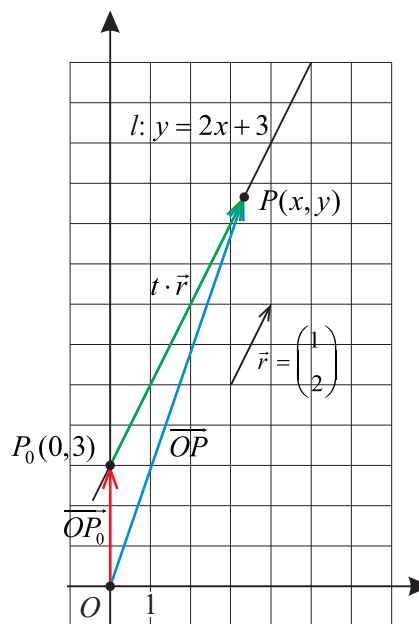
Punktet $P_0(0, 3)$ er linjens skæringspunkt med y -aksen.

Ethvert punkt $P(x, y)$ på linjen l kan beskrives ved sin stedvektor $\overrightarrow{OP}$ givet ved vektorsummen

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tallet t kaldes *parameteren*.

Denne måde at beskrive en ret linje på kaldes *linjens parameterfremstilling*.



Figur 21

Eksperiment 4 (fortsættelse af eksempel 8)

- a) Bestem koordinaterne til $\overrightarrow{OP}$ for en række forskellige værdier af t , og opstil svarene i en tabel som nedenstående

t	x	y
0	0	3
...		

- b) Afsæt derefter de tilsvarende punkter P i et koordinatsystem på kvadreret papir.
c) Hvad kan du konkludere?

En retningsvektor $\vec{r}$ for en ret linje behøver ikke at have førstekoordinaten 1, men skal være parallel med linjen. Det givne punkt P_0 behøver ikke at ligge på y -aksen, men det skal ligge på linjen.

Sætning 9

En ret linje l har $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ som retningsvektor og går gennem punktet $P_0(x_0, y_0)$.

Parameterfremstillingen for linjen l kan skrives som vektorligning $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{r}$ eller i koordinater

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} x = x_0 + t \cdot r_1 \\ y = y_0 + t \cdot r_2 \end{cases}.$$

Øvelse 16

En ret linje har ligningen $y = -2 \cdot x + 5$.

- Bestem et punkt på linjen og en retningsvektor for linjen.
- Opskriv en parameterfremstilling for linjen.

Opgave 8

En linje l har retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Punktet $P(4, 7)$ ligger på linjen.



- Tegn linjen l i et koordinatsystem med et CAS-værktøj.
- Bestem en parameterfremstilling for linjen l .

Øvelse 17 (CAS)

Linjerne l og m er givet ved parameterfremstillingerne

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Tegn l og m i et koordinatsystem med et CAS-værktøj.
- Hvilket punkt svarer til $t = 1$ på l , og hvilket punkt svarer til $t = 0$ på m ?
- Hvad betyder det for de to linjers beliggenhed?

Linjen n er givet ved parameterfremstillingen

$$n: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Gør rede for, at retningsvektorerne for l og n er parallelle.
- Tegn n i samme koordinatsystem som l og m .
- Hvilket punkt svarer til $t = 0$ på l og n ?
- Hvilket punkt svarer til $t = 1$ på l og n ?
- Opskriv en anden parameterfremstilling for en linje, der ligger oveni l .

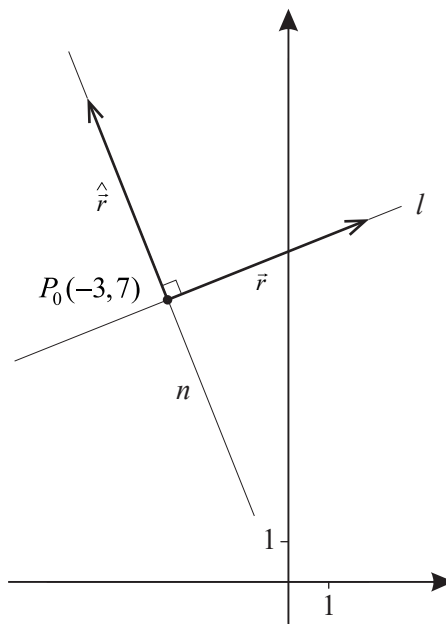
Eksempel 9

En ret linje l går gennem punktet $P_0(-3, 7)$ og har retningsvektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Den rette linje n står vinkelret på l og går også gennem punktet $P_0(-3, 7)$.

Tværvektoren $\hat{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ står vinkelret på $\vec{r}$ og vil dermed være retningsvektor for n . Vi kan nu opskrive en parameterfremstilling for n :

$$n: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$



Figur 22

Opgave 9

En ret linje l er givet ved parameterfremstillingen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.



a) Bestem koordinatsættet til det punkt på l , der svarer til $t = 5$.

En anden ret linje m står vinkelret på l og går igennem punktet $P(1, 1)$.

b) Tegn en skitse af situationen, hvoraf linjerne l og m samt punktet P fremgår.

c) Bestem en retningsvektor for m .

d) Bestem en parameterfremstilling for m .

Øvelse 18 (CAS)

På figur 23 ses et udsnit af Byparken med den sti, som forældrene gik ad til udgang U1.

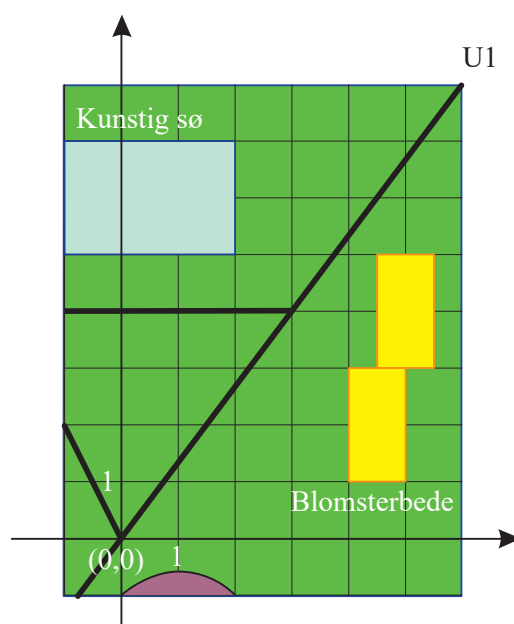
Den rute, de går på stien mod udgangen, kan beskrives ved linjen med parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

hvor t er antal minutter, efter at de gik ind på stien ved $(0, 0)$.

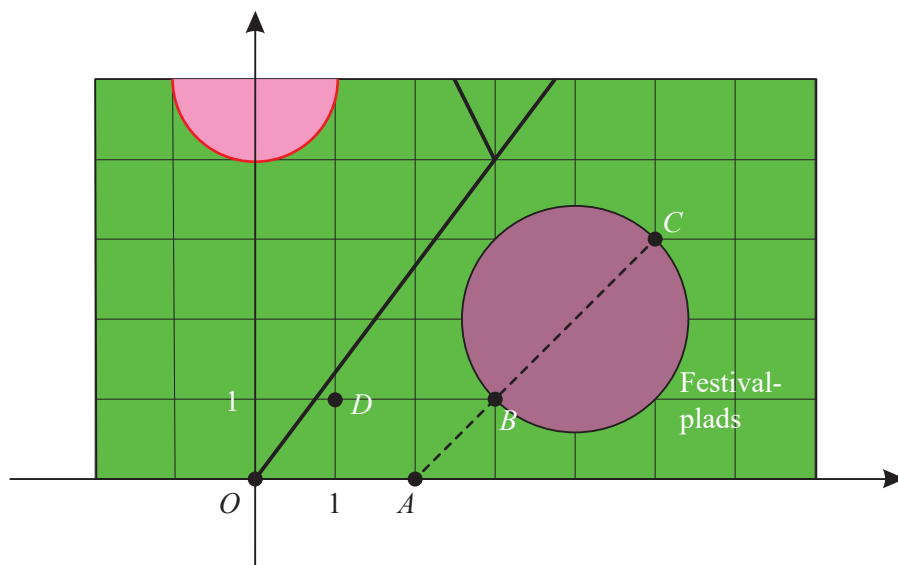
a) Bestem koordinatsættet til deres position efter 3 minutter.

b) Overvej, om man kan tælle sig frem til, hvor lang tid der går, før forældrene når frem til udgang U1.



Figur 23

Eksempel 10



Figur 24

På figur 24 er et andet udsnit af kortet over Byparken lagt ind i et koordinatsystem. Jasmin går fra punktet $A(2, 0)$ ad den stiplede linje og tværs over festivalpladsen fra punkt $B(3, 1)$ til punkt $C(5,3)$.

Hendes rute kan beskrives ved linjen med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix},$$

hvor t er antal minutter fra starten i punkt A .

Efter 1 minut er Jasmin kommet til punktet $(2,5, 0,5)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Efter 3 minutter er Jasmin kommet til punktet $(4, 2)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi kan beregne, hvor lang tid det tager Jasmin at nå fra punkt A til punkt B , ved at løse ligningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dvs. ligningssystemet } \begin{cases} x = 2 + t \cdot 0,5 = 3 \\ y = 0 + t \cdot 0,5 = 1 \end{cases}.$$

Vi behøver kun at løse ligningen for x -værdien, fordi vi ved, at punktet ligger på hendes rute:

$$2 + 0,5 \cdot t = 3 \Leftrightarrow 0,5 \cdot t = 1 \Leftrightarrow t = 2.$$

Kontrol: Ved at indsætte $t = 2$ i y -værdien får vi $y = 1$, som netop er andenkoordinaten til B :

$$y = 0 + 2 \cdot 0,5 = 1.$$

Det tager altså Jasmin 2 minutter at gå fra A til B .

I eksempel 10 var ligningerne lette at løse. Bliver de mere komplicerede, løser man dem med et CAS-værktøj.

Øvelse 19 (fortsættelse af eksempel 10)

- a) Hvor lang tid tager det for Jasmin at nå fra punkt A til punkt C (se figur 24)?

I eksempel 10 og øvelse 19 er t lig med det antal minutter, Jasmin har gået.

Længden af retningsvektoren $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ er den strækning, hun går på 1 minut.

Opgave 10 (fortsættelse af eksempel 10 og øvelse 19)

Dennis starter sin gåtur samtidig med Jasmin. Han går fra punkt $D(1, 1)$ mod punkt C (se figur 24). Hans rute kan beskrives ved parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix},$$

hvor t er antal minutter fra starten i punkt D .

- a) Hvor lang tid tager det for Dennis at nå frem til punkt C ?
b) Kommer Jasmin og Dennis frem til punkt C på samme tid?
c) Hvem af de to går hurtigst?



Eksempel 11

På figur 25 ses et nyt udsnit af Byparken. En hund løber i en ret linje fra den vandrette sti og tværs gennem det ene blomsterbed. Dens rute er markeret med en stiplet linje. Ruten kan beskrives ved linjen med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ dvs. } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - 2 \cdot t \end{cases},$$

hvor t er antal minutter efter hundens start i punktet $(2, 4)$.

Blomsterbedets lodrette venstre side følger linjen med ligningen $x = 3$.

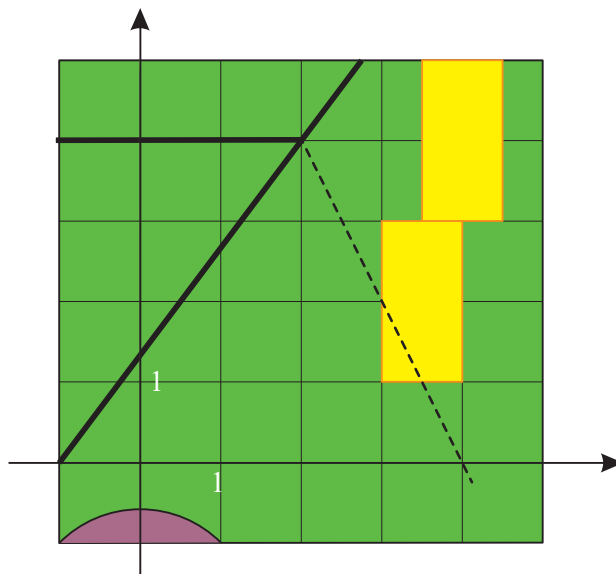
Vi kan beregne koordinatsættet til det punkt, hvor hundens rute krydser blomsterbedets lodrette side, ved at finde den y -værdi, der svarer til en x -værdi på 3.

Vi løser derfor ligningen $x = 3$:

$$2 + t = 3 \Leftrightarrow t = 1.$$

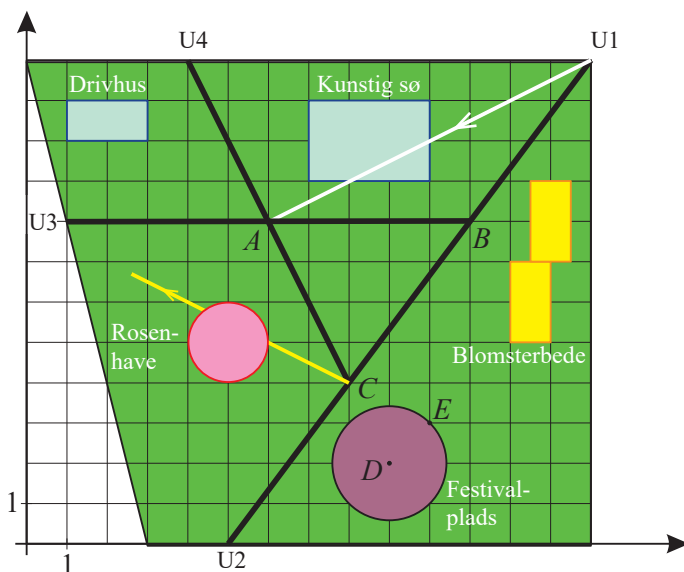
Vi indsætter $t = 1$ i udtrykket for y : $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$.

Altså løber hunden ind i blomsterbedet i punktet $(3, 2)$.



Figur 25

Opgave 11



Figur 26

En drone flyver ind over Byparken. I en model tillader vi os at regne på dronens rute, som om den fløj i jordhøjde. Dronen flyver i en ret linje gennem udgang U1(14, 12) til punktet A(6, 8). Denne rute er vist med hvidt på figur 26.

- Bestem en parameterfremstilling for den rette linje l , der beskriver dronens rute.
- Bestem koordinatsættene til de to steder, hvor dronens rute skærer igennem kanten af den kunstige sø.

Eksempel 12

Familiens mormor starter i punktet C(8, 4) og går uden for stisystemet og med raske skridt i lige linje mod Rosenhaven med retningsvektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hendes rute er vist med gult på figur 26 og kan beskrives ved parameterfremstillingen

$$\begin{cases} x = 8 - 2t \\ y = 4 + t \end{cases},$$

hvor t er tiden i minutter, efter at hun begyndte at gå.

Rosenhaven har centrum i punktet R(5, 5) og radius 1. Vi tegner cirklen og hendes rute i CAS-værktøjet. Skæringspunkterne bestemmes på figuren til (6, 5) og (4.4, 5.8). Hun kommer altså ind i Rosenhaven ved punktet (6, 5) og går ud igen ved punktet (4.4, 5.8).

Skæringspunkterne mellem linjen og cirklen kan også beregnes ved at løse et ligningssystem med tre ligninger og tre ubekendte:

$$\begin{cases} x = 8 - 2t \\ y = 4 + t \\ (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 1. \end{cases}$$

De to første ligninger definerer hendes rute. Nederst står ligningen for den cirkel, der afgrænser Rosenhaven. CAS-værktøjet giver igen skæringspunkterne (6, 5) og (4.4, 5.8). Desuden finder man løsningerne $t = 1$ og $t = 1.8$. Det betyder, at familiens mormor forsvinder ind i Rosenhaven efter 1 minut og kommer ud igen fra Rosenhaven 1.8 minutter efter starten.

Øvelse 20 (CAS)

- a) Tegn en del af Byparken (se figur 26) i CAS-værktøjet. Det er tilstrækkeligt, at man kan se punktet A og Rosenhaven i koordinatsystemet. Brug fx vinduet $0 \leq x \leq 7$ og $0 \leq y \leq 9$.

Familiens morfar starter ved udgang U2 og går uden for stisystemet i lige linje gennem Rosenhaven mod punktet A .

- b) Tegn hans rute i koordinatsystemet.
c) Opstil en parameterfremstilling for hans rute.
d) Aflæs koordinatsættet til det punkt, hvor han kommer ind i Rosenhaven og til det punkt, hvor han kommer ud igen.
e) Bestem ved at løse et ligningssystem med tre ligninger koordinatsættet til det punkt, hvor familiens morfar kommer ind i Rosenhaven og til det punkt, hvor han kommer ud igen.

Han er i alt 10 minutter om turen fra udgang U2 til A .

- f) Giv en fortolkning af de t -værdier, der er en del af løsningen til ligningssystemet.

Opgave 12



Det oplyses, at den cirkelformede festivalplads har centrum $D(9,2)$ og går gennem punktet $E(10,3)$.

- a) Tegn en del af Byparken (se figur 26) i CAS-værktøjet. Det er tilstrækkeligt, at man kan se festivalpladsen, punktet C og udgang U4 i koordinatsystemet. Brug fx vinduet $0 \leq x \leq 11$ og $0 \leq y \leq 12$.
b) Bestem en parameterfremstilling for den linje, der går gennem udgang U4 og punktet C .
c) Bestem en ligning for den cirkel, som afgrænser festivalpladsen.

Joakim går ad stien fra udgang U4 til punktet C og fortsætter i samme retning hen over festivalpladsen.

- d) Bestem med anvendelse af CAS-værktøjet koordinatsættet til det punkt, hvor han krydser ind på festivalpladsen, og til det punkt, hvor han krydser ud igen.

Turen fra udgang U4 til punktet C tager ham 2 minutter.

- e) Hvor mange minutter bruger Joakim på at krydse indover festivalpladsen?

Eksempel 13

To motionsløbere Asta og Bertram træner i Byparken (figur 27).

Astas position til tidspunktet t kan beskrives ved

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

hvor t er antal minutter efter start i punktet $A(1,4)$. Astas rute er tegnet hvid og stiplet. Bertrams position til tidspunktet s kan beskrives ved

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

hvor s er antal minutter efter start i punktet $B(0,0)$.

Bertram starter i punktet $B(0,0)$ samtidig med, at Asta starter i punktet $A(1,4)$.

Deres ruter krydser hinanden i punktet C .

For at bestemme koordinatsættet til punktet C løser vi ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ dvs.}$$

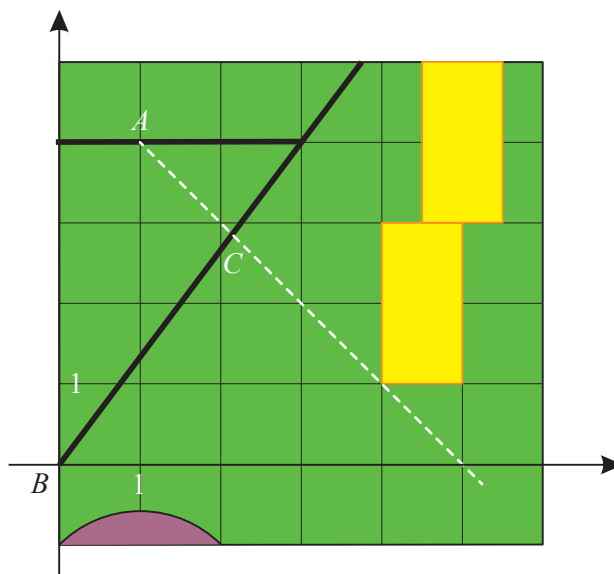
$$\begin{cases} 1+t=3 \cdot s \\ 4-t=4 \cdot s \end{cases}$$

Vi løser ligningssystemet med CAS-værktøjet og får $t=1,14$ og $s=0,71$.

Da vi ved, at ruterne krydser hinanden i punktet C , kan vi finde C 's koordinater ved at indsætte $t=1,14$ i Astas rute eller $s=0,71$ i Bertrams rute. Her benytter vi Bertrams rute:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,71 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,1 \\ 2,8 \end{pmatrix}.$$

Altså har punktet C koordinatsættet $(2,1, 2,8)$.



Figur 27

Øvelse 21 (fortsættelse af eksempel 13)

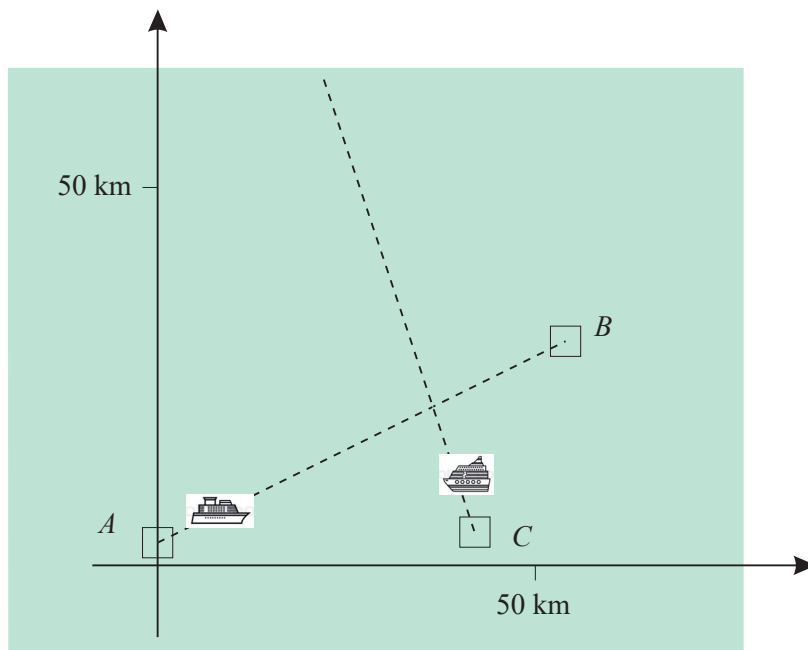
- a) Kontrollér ved indsættelse af $t=1,14$ i parameterfremstillingen for Astas rute, at man får det samme resultat som i eksempel 13.

Eksempel 14 (fortsættelse af eksempel 13 og øvelse 21)

Punktet C er det punkt på Bertrams rute, hvor $s=0,71$. Bertram har altså løbet i 0,71 minutter, da han når punktet C . Da C også er det punkt på Astas rute, hvor $t=1,14$, tager det Asta 1,14 minutter at nå frem til C .

Asta og Bertram mødes altså ikke i punktet C .

Opgave 13



Figur 28

Et skib sejler fra havnen A til havnen B . I en model er de to havne placeret i et koordinatsystem i punkterne $A(0, 3)$ og $B(54, 30)$. Figur 28 viser en skitse af situationen.

I modellen er skibets position til tidspunktet t , målt i minutter efter afsejling fra A , givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem, hvor lang tid der går ifølge modellen, før skibet kommer til havnen B .

Et andet skib sejler fra havnen C på samme tidspunkt.

Dette skibs position til tiden s , målt i minutter efter afsejling fra havnen C , er i modellen givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 4,4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,15 \end{pmatrix}.$$

- b) Bestem koordinatsættet til det punkt, hvor de to skibes ruter krydser hinanden.
c) Mødes de to skibe, hvis de afsejler til samme tidspunkt $s = t = 0$?

Bilag 1. Vejledning til vektorer i GeoGebra

Tegning af en vektor

En vektor kan tegnes ud fra dens koordinatsæt.

Ønsker du fx at tegne vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, skrives følgende i inputfeltet: $a = (1,3)$.

Bemærk, at vektorens navn *skal* skrives med et lille bogstav. Skrives navnet med et stort bogstav, afsættes i stedet punktet $A = (1,3)$.

Forbindelsesvektoren $\overline{AB}$ fra punktet A til punktet B kan tegnes ved at vælge menuen "Vektor". Herefter klikkes først på A og bagefter på B .

Endelig er det også muligt at tegne en vektor med udgangspunkt i et defineret punkt og en defineret vektor. Her vælges menuen "Vektor fra punkt", hvorefter der først klikkes på punktet og efterfølgende på vektoren.

Længde af vektor

Længden af en givet vektor bestemmes ved at skrive kommandoen $\text{længde}(\langle \text{vektor} \rangle)$ i inputfeltet.

Længden af en forbindelsesvektor kan også bestemmes ved brug af længdeværktøjet.

Tværvektor

Tværvektoren til en vektor bestemmes ved at skrive kommandoen $\text{tværvektor}(\langle \text{vektor} \rangle)$ i Inputfeltet.

Tværvektoren kan også tegnes ved at dreje vektoren 90° mod uret. Hertil bruges menuen "Drej om punkt".

Regning med vektorer

De enkelte vektorer tegnes og herefter skrives det udtryk, der ønskes beregnet, i Inputfeltet.

Parameterfremstilling for ret linje

Linjer tegnes ved at skrive parameterfremstillingen i Inputfeltet. Ønsker du fx at tegne linjen beskrevet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{skrives følgende i inputfeltet: } (0,3) + t \cdot (1,2)$$

Bemærk, at parameteren *skal* hedde t .

Parameterfremstillingen kan også skrives på tilsvarende vis med udgangspunkt i et i forvejen defineret punkt og en defineret vektor.

Når linjen er tegnet, kan man bestemme skæringspunkter med andre linjer og objekter på sædvanlig vis ved brug af skæringsværktøjet.

Kommandoen $\text{kurve}(\langle \text{udtryk} \rangle, \langle \text{udtryk} \rangle, \langle \text{var} \rangle, \langle \text{fra} \rangle, \langle \text{til} \rangle)$ kan benyttes, hvis parameteren skal hedde noget andet end t , og hvis parameterintervallet skal angives.

Fx fås ovenstående parameterfremstilling ved at skrive følgende i Inputfeltet:

$\text{kurve}(0 + t \cdot 1, 3 + t \cdot 2, t, 0, 10)$. Her tegnes linjen i intervallet $0 \leq t \leq 10$.

Bilag 2. Vejledning til vektorer i Nspire

Tegning af en vektor

En vektor kan tegnes som stedvektor ud fra dens koordinatsæt. Brug applikationen Grafer. Man kan med fordel anvende indstillingen Vis gitter.

Ønsker du fx at tegne vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, afsættes punktet $(1, 3)$. Et punkt afsættes lettest ved at taste

bogstavet p og derefter koordinaterne (dette er nyt i version 5.0). Derefter vælges i værktøjskassen: Geometri – Punkter og linjer – Vektor. Klik først på punktet $O(0,0)$, derefter på endepunktet $(1, 3)$.

En forbindelsesvektor $\overline{AB}$ fra et givet punkt A til et givet punkt B kan tegnes på samme måde ved at vælge menuen ”Vektor”. Herefter klikkes først på A og bagefter på B .

Regning med vektorer

Beregninger foregår i applikationen Noter (eller Beregninger). Vektoren $\vec{a}$ (se ovenfor) indskrives i et matematikfelt ved hjælp af matematikskabelonen $\begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$ eller som $[1;3]$. Output bliver skrevet som søjle i firkantet parentes.

En vektor kan gemmes under et variabelnavn. Vektorpile kan ikke benyttes i variabelnavne, men kun i tekst.

Vektorsum, vektordifferens og konstant gange vektor beregnes i applikationen Noter (eller Beregninger).

Længde af vektor

Beregning: Længden af en givet vektor $\vec{v}$ bestemmes i Noter (eller Beregninger) ved at skrive kommandoen $\text{norm}(\vec{v})$.

Geometrisk: Højreklik på vektoren, og vælg Måling – Længde.

Tværvektor

Beregning: Der findes ikke en kommando til at bestemme tværvektor.

Geometrisk: Konstrueres ved en drejning på 90° i positiv omløbsretning.

Parameterfremstilling for ret linje

Brug applikationen Grafer. I værktøjskassen vælges Grafindtastning/redigér – Parameterfremstilling. Ønsker du fx at tegne linjen beskrevet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{skrives} \quad \begin{matrix} x1(t) = t \\ y1(t) = 3 + 2 \cdot t \end{matrix} \quad \text{i indtastningslinjen, og der vælges et}$$

passende parameterinterval. Som regel er $-10 \leq t \leq 10$ passende.

Når linjen er tegnet, kan man *ikke* bestemme skæringspunkter med andre linjer eller grafer ved aflæsning. Hvis man skal bestemme skæringspunktet mellem to linjer, som er tegnet ud fra deres parameterfremstillinger, kan man vælge Geometri og tegne to linjer oveni de to parameterlinjer.

Bilag 3. Indstiksark til formelsamlingen

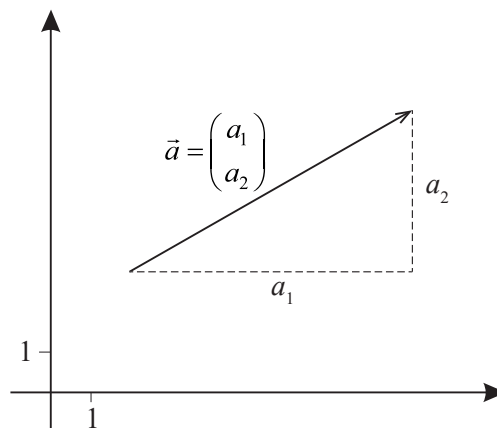
Definition 1

En vektor $\vec{a}$, der går a_1 enheder i x -aksens retning og a_2 enheder i y -aksens retning (begge regnet med fortegn), har koordinatsættet

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Nulvektoren med koordinatsættet $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ har

længden 0 og ingen retning.



Sætning 1

Længden af en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ beregnes med formelen $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

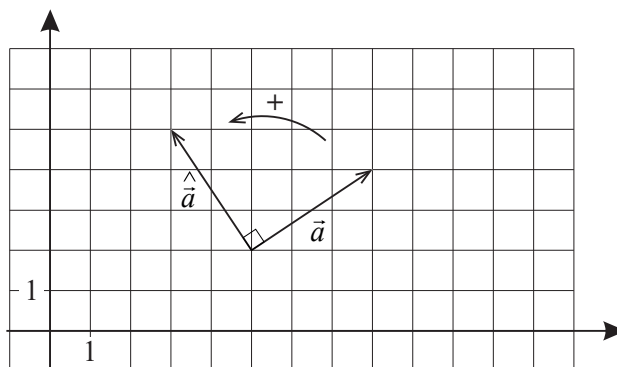
Definition 3

Tværvektoren $\hat{\vec{a}}$ står vinkelret på $\vec{a}$ og har samme længde som $\vec{a}$.

Tværvektoren $\hat{\vec{a}}$ fremkommer af vektor $\vec{a}$ ved en drejning på 90° i positiv omløbsretning.

Symbolet $\hat{\vec{a}}$ læses ”a hat”.

Tværvektoren omtales ofte som ”hat-vektoren”.



Sætning 2

Tværvektoren til $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ har koordinatsættet $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Definition 4

Vektoren $\overrightarrow{OA}$ fra $O(0,0)$ til $A(a_1, a_2)$ kaldes *stedvektoren* til punktet A .

Sætning 3

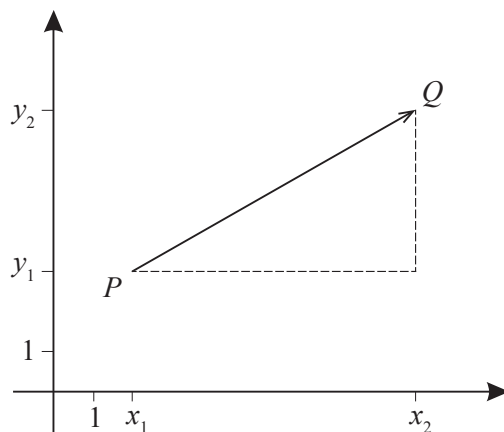
Stedvektoren $\overrightarrow{OA}$ til punktet $A(a_1, a_2)$ har koordinatsættet $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Sætning 4

To punkter er givet ved $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$.

Forbindelsesvektoren $\overrightarrow{PQ}$ har da

koordinatsættet $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$.



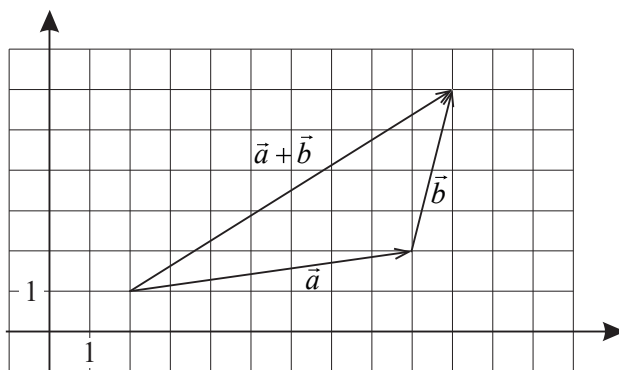
Sætning 5

Sumvektoren $\vec{a} + \vec{b}$ af vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

har koordinatsættet

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

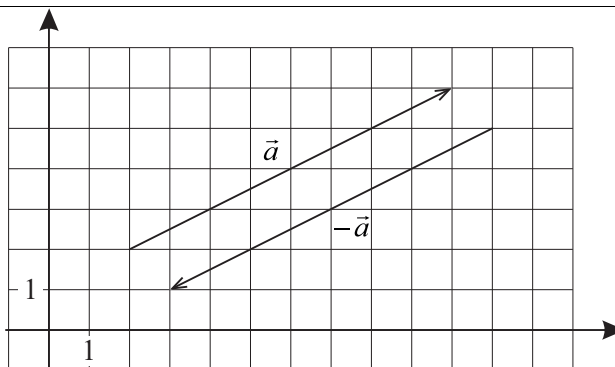


Geometrisk betyder sum af to vektorer, at de to vektorer lægges i forlængelse af hinanden. Sumvektoren er den vektor, der går fra den første vektors begyndelsespunkt til den anden vektors endepunkt.

Sætning 6

$-\vec{a}$ kaldes den modsatte vektor til $\vec{a}$.

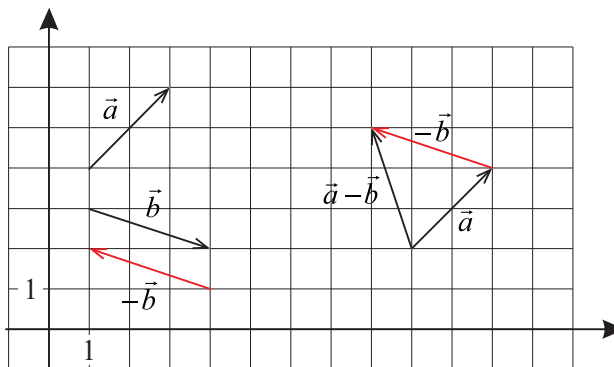
Når $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, er $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$.



Sætning 7

Differensvektoren $\vec{a} - \vec{b}$ beregnes ved at trække koordinaterne for vektor $\vec{b}$ fra koordinaterne for vektor $\vec{a}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}.$$



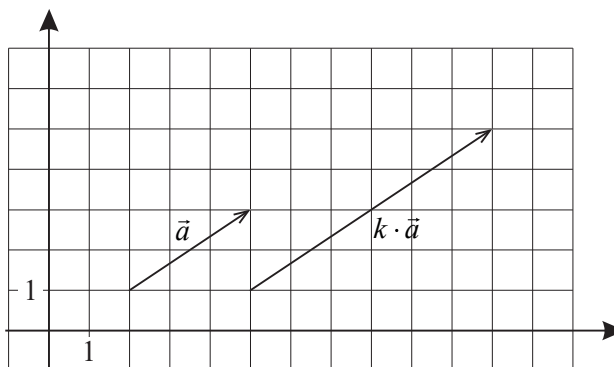
Når man trækker en vektor $\vec{b}$ fra en vektor $\vec{a}$, gør man det ved at lægge $\vec{b}$'s modsatte vektor til $\vec{a}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Sætning 8

Når man ganger en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ med et tal k , ganger man vektorens koordinater med k :

$$k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}.$$



Vektor $k \cdot \vec{a}$ er k gange så lang som $\vec{a}$ og har samme retning, hvis k er et positivt tal og modsat retning, hvis k er et negativt tal.

Sætning 9

En ret linje l har $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ som retningsvektor og går gennem punktet $P_0(x_0, y_0)$.

Parameterfremstillingen for linjen l kan skrives som vektorligning $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{r}$ eller i koordinater

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} x = x_0 + t \cdot r_1 \\ y = y_0 + t \cdot r_2 \end{cases}.$$