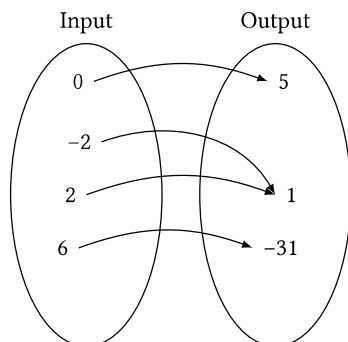


1.4 Funktioner

En *funktion* i matematik er en form for regneoperation. Man kan beskrive en funktion som en slags maskine, der til ethvert input giver et bestemt output – dvs. en funktion er en sammenhæng mellem tal.



Figur 1.9: Funktionen »sæt tallet i anden, og træk det fra fem«.

På figur 1.9 er det vist, hvordan funktionen »sæt tallet i anden, og træk det fra fem« opfører sig. Man kan se hvilket output man får for 4 forskellige tal. Som man kan se, kan forskellige tal godt give det samme output – men omvendt er det ikke tilladt at det samme input kan give forskellige output.

Fordi det er besværligt at beskrive funktioner på denne måde, har man fundet på en matematisk notation, der gør det nemmere. Funktionen selv betegnes med et bogstav, f.eks. f . I stedet for »sæt tallet i anden, og træk det fra fem«, kan man altså skrive f . Bogstavet f indeholder i sig selv ingen information om, hvad funktionen f gør. Hvis man vil forklare det, kan man skrive en såkaldt *forskrift* op:

$$f(x) = 5 - x^2.$$

Denne notation betyder, at hvis man sender et tal (x) gennem funktionen f , bliver der gjort det ved tallet, som er beskrevet på højre side. $f(x)$ læses » f af x «, og parenteser skal altså ikke forstås som en regneparentes, men en angivelse af, at det er tallet x som sendes gennem funktionen f . Det tal man får ud af regneoperationen kaldes *funktionsværdien*.

Eksempel 1.7 Her ses på funktionen $f(x) = x^2 - 3$.

Funktionsværdierne $f(-1)$ og $f(4)$ beregnes således:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2 \\ f(4) &= 4^2 - 3 = 16 - 3 = 13. \end{aligned}$$

Det er her vigtigt at bemærke, at x 'et i funktionsudtrykket $f(x)$ egentlig bare er en »pladsholder«, dvs. det viser, hvor man skal erstatte med tal, når man beregner en funktionsværdi. Faktisk kan man ikke kun sætte tal ind på x 'ets plads, man kan også sætte andre variable ind – eller hele regneudtryk.

Eksempel 1.8 Her ses igen på funktionen $f(x) = x^2 - 3$. Men nu beregnes $f(t)$ og $f(x-1)$, dvs. man skal sætte hhv. t og $x-1$ ind i stedet for x :

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 - 3 \\ f(x-1) &= (x-1)^2 - 3 = x^2 + 1^2 - 2 \cdot x \cdot 1 - 3 = x^2 - 2x - 2. \end{aligned}$$

Hvis man sender et variabeludtryk gennem en funktion, får man altså et variabeludtryk ud igen.

Hvis man vil have et overblik over, hvordan en funktion opfører sig, kan det være nyttigt at tegne dens graf.

Eksempel 1.9 Her ses på en funktion

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{x+2}.$$

Grafen for funktionen er det samme som grafen for ligningen $y = f(x)$, dvs.

$$y = 3 \cdot \sqrt{x+2},$$

og den kan ses på figur 1.10.

Som det kan ses på figuren går funktionens graf igennem punktet $(2; 6)$, dvs.

$$f(2) = 6.$$

Dette kunne man også have regnet ud ved at indsætte 2 i funktionen f :

$$f(2) = 3 \cdot \sqrt{2+2} = 3 \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6.$$

Men det kan altså også aflæses direkte på grafen.

Hvis man omvendt kender funktionsværdien, kan man finde ud af, hvilken værdi af den uafhængige variabel, der giver denne funktionsværdi. Dette kan gøres ved aflæsning, men problemet kan også løses ved udregning, som i følgende eksempel.

Eksempel 1.10 Hvornår antager funktionen $g(x) = 2x + 1$ værdien 17?

Svaret på dette spørgsmål finder man frem til ved at løse ligningen $g(x) = 17$. Det gøres på følgende måde:

$$\begin{aligned} g(x) &= 17 && \Leftrightarrow \\ 2x + 1 &= 17 && \Leftrightarrow \\ 2x &= 16 && \Leftrightarrow \\ x &= 8. \end{aligned}$$

Svaret på spørgsmålet er altså, at $g(x) = 17$, når $x = 8$.

Definitions- og værdimængde

Funktionen i eksempel 1.9, $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x+2}$, kan ikke anvende alle værdier af x som input. Prøver man f.eks. at beregne $f(-5)$ får man

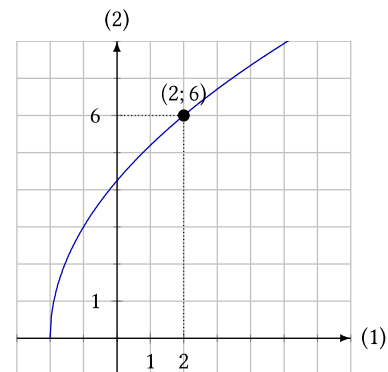
$$f(-5) = 3 \cdot \sqrt{-5+2} = 3 \cdot \sqrt{-3},$$

men da man ikke kan tage kvadratroden af negative tal, så giver dette ingen mening. Denne funktionsværdi eksisterer derfor ikke.

Ser man på grafen for denne funktion (figur 1.10), kan man se, at grafen først starter ved $x = -2$. Det skyldes, at funktionsudtrykket kun giver mening for tal større end eller lig med -2 . Man siger her, at *definitionsområdet* for f består af alle de tal, som er større end eller lig med -2 . Hvis man vil understrege dette, kan man skrive det efter forskriften på denne måde:

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{x+2}, \quad x \geq -2.$$

Nogle gange angiver man en definitionsområde, som består af færre tal end de tal der rent faktisk kan sættes ind i funktionen. Det kan f.eks. være fordi funktionen er udtryk for en matematisk model, hvor man kun vil se på bestemte tal.



Figur 1.10: Grafen for $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x+2}$.