Regning

Version 1.1

5. januar 2019

$$\frac{7}{2} + \frac{3}{4} \cdot 2$$

$$4 + 6^2 - 3 \cdot (-7)$$

$$\frac{4x^2y}{2xy^5}$$

$$2x + 4 = 3$$

$$(x + 3)(2x - 1) = 0$$

$$\sqrt[3]{7 + 2 \cdot 5}$$

$$(a + b)(a - b)$$

$$a^2 + b^2 - 2ab$$

Mike Vandal Auerbach

www.mathematicus.dk

Regning
Version 1.1, 2019

Disse noter er en opsamling på generelle regne- og algebraiske teknikker samt ligningsløsning. Der er gjort et forsøg på at begrunde i videst mulig omfang, hvorfor matematikken virker som den gør. Stoffet i disse noter er ikke egentligt kernestof i stx, men er dog en nødvendig forudsætning for at kunne håndtere den matematik, der er beskrevet i kernestoffet.

Disse noter er skrevet til matematikundervisning på stx og må frit anvendes til ikke-kommercielle formål.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Mike Vandal Auerbach, 2019

© 2019 Mike Vandal Auerbach.
Materialet er udgivet under en »Kreditering-IkkeKommerciel-DelPåSammeVilkår 4.0 International«-licens (CC BY-NC-SA 4.0).

Indhold

1 Tal og regningsarter

En af grundstenene i matematikken er tallene. Tal bruges til mange forskellige formål: til at tælle med, til at måle størrelser, til at opregne overskud og gæld.

I de næste par afsnit ses på forskellige typer af tal samt de fire regningsarter: *addition* (at lægge sammen), *subtraktion* (at trække fra), *multiplikation* (at gange) og *division* (at dele/dividere).

De første tal, man lærer at kende, er de tal, man kalder de *naturlige tal*. Det er de tal man bruger til at tælle med, dvs.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots \ .$$

Hvis man vha. et tal skal udtrykke, at der intet er, bruger man tallet 0, som dog ikke regnes med til de naturlige tal.

1.1 Addition

Den simpleste af de fire regningsarter er *addition*, at lægge sammen. Denne regneoperation udtrykker på sin vis det samme, som man kan sige med ordet »og«.[1]

[1]Selve symbolet + kommer med al sandsynlighed fra ordet *et*, som betyder »og« på latin.[1]

Har man f.eks. en bunke med 7 stk. og en bunke med 11 stk. har man i alt »7 stk. og 11 stk.«, dvs. 18 stk. I matematikken skrives dette

$$7 + 11 = 18 \ .$$

De to tal 7 og 11 kaldes *led* og resultatet 18 kaldes en *sum*.

Da tegnet + udtrykker, at man lægger to værdier oven i hinanden, må det forventes, at rækkefølgen er ligegyldig, altså at

$$7 + 11 = 11 + 7 \ .$$

Dette er også tilfældet.

1.2 Subtraktion og negative tal

Én ting, man ikke kan udtrykke vha. af de naturlige tal, er ideen om mangel eller gæld. Hertil kan man bruge de negative tal.[2] I første omgang kan man nøjes med at se på de negative hele tal:

[2]De negative tal er en forholdsvis ny opfindelse inden for matematikken. Helt op i det 18. århundrede, var der matematikere, der mente, at de negative tal ikke eksisterede.[2]

$$-1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots \ .$$

Man kan på sin vis sige, at ethvert negativt tal er et »modsat tal« til et positivt tal. Lægger man sammen får man f.eks.[3]

$$3 + (-3) = 0 \quad \text{og} \quad (-3) + 3 = 0 \,.$$

[3] I regnestykket er der sat parentes om −3. Det gør man for at vise, at − er et fortegn, dvs. det hører til tallet −3; en anden god grund er, at når man sætter parentesen, er det nemmere at se, at der både står et + og et −. Helt generelt må man ikke skrive et fortegn lige efter et regnetegn uden at sætte en parentes.

Man kan argumentere for, at $-(-3)$ er det modsatte tal til -3, og at der derfor må gælde, at

$$-(-3) + (-3) = 0 \,.$$

Men fordi $3 + (-3) = 0$, må man have, at

$$-(-3) = 3 \,.$$

Dette må gælde for alle tal (og ikke kun tallet 3).

Vha. de negative tal kan man *definere* subtraktion som addition med det modsatte tal. Et eksempel kunne være

$$8 - 2 = 8 + (-2) \,.$$

Dette kan også forklare hvorfor man ikke bare kan bytte rundt på tallene. $2 - 8$ er ikke det samme som $8 - 2$, da tegnet − faktisk hører til 2-tallet. Når man lægger sammen er rækkefølgen til gengæld ligegyldig, så man kan gøre følgende

$$8 - 2 = 8 + (-2) = -2 + 8 \,.$$

Som man kan se, bliver tegnet − ved med at stå foran 2-tallet.

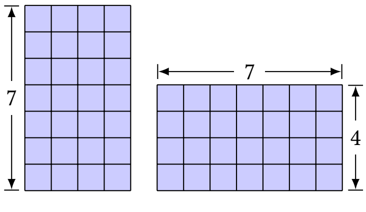
De to tal 8 og 2 i regnestykket kaldes ligesom ved addition for *led*, mens resultatet (6) kaldes en *differens*.

1.3 Multiplikation

At gange to tal (*multiplicere* dem) er faktisk en udvidelse af at lægge sammen, idet f.eks.

$$7 \cdot 4 = \overbrace{4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4}^{7 \text{ gange}} = 28 \,.$$

Heraf ser man også, hvorfor tegnet »·« kaldes »gange«.



Figur 1.1: Man kan ud fra billedet argumentere for, at $7 \cdot 4 = 4 \cdot 7$.

Hvor man ved *addition* nemt kan argumentere for, at rækkefølgen er ligegyldig, er det måske lidt sværere umiddelbart at se, hvorfor $7 \cdot 4 = 4 \cdot 7$, men det skyldes at tallet $4 \cdot 7$ kan betragtes som arealet af et rektangel, der er 4 på den ene led og 7 på den anden. Figur 1.1 giver et billede af denne ide.

Tallene, der ganges sammen (her 7 og 4) kaldes *faktorer*, og resultatet (28) kaldes *produktet* af de to tal.

Fortegn

Det er simpelt at argumentere for, hvordan man ganger positive tal sammen; men hvad sker der, når man blander negative tal ind i regnestykkerne?

Hvis man ser på de negative tal som gæld, er det naturligt at fortolke et regnestykke som $-6 \cdot 3$ på den måde, at man gør en gæld på 6 stk. 3 gange så stor, hvilket giver en gæld på 18. Dvs.

$$-6 \cdot 3 = -18 \; .$$

Da rækkefølgen, man ganger i, er ligegyldig, gælder der så også, at[4]

$$3 \cdot (-6) = -18 \; .$$

[4]Bemærk parentesen om -6; den sætter man for at vise at fortegnet hører til 6-tallet (og den er ikke valgfri).

Hvis man ganger et positivt tal med et negativt (eller omvendt), bliver resultatet altså negativt.

For at finde ud af, hvad der sker, når man ganger to negative tal med hinanden, kan man bruge følgende argument: $-2 \cdot (-4)$ må være det modsatte tal til $2 \cdot (-4)$. Og da $2 \cdot (-4) = -8$, må

$$-2 \cdot (-4) = -(-8) = 8 \; .$$

Når man ganger to negative tal med hinanden, bliver resultatet altså positivt.

Fortegnsreglerne for multiplikation kan ses samlet i tabel 1.2.

Tabel 1.2: Fortegnsregler for multiplikation.

Regel	Eksempel
$(+) \cdot (+) = (+)$	$2 \cdot 3 = 6$
$(+) \cdot (-) = (-)$	$2 \cdot (-4) = -8$
$(-) \cdot (+) = (-)$	$(-3) \cdot 5 = -15$
$(-) \cdot (-) = (+)$	$(-4) \cdot (-2) = 8$

1.4 Division

Hvis 2 venner skal dele 6 colaer, får de 3 hver. Regnestykket man udfører, er en division:

$$\frac{6}{2} = 3.$$

Tallet, som bliver delt (her 6), kaldes en *dividend*, mens tallet der deles med (2) kaldes en *divisor*. Resultatet af divisionen kaldes en *kvotient*.

At dividere (eller dele) er det modsatte af at gange. Det, man finder svaret på, er i virkeligheden spørgsmålet: *Hvilket tal skal man gange med 2 for at få 6?*[5]

[5]Det forklarer også, hvorfor man ikke kan dividere med 0. Resultatet af regnestykket $\frac{4}{0}$ er svaret på spørgsmålet: *Hvad skal jeg gange med 0 for at få 4?* Men da et tal ganget med 0 altid giver 0, kan et tal ganget med 0 aldrig give 4. Det giver derfor slet ikke mening at dividere med 0.

Division resulterer ikke altid i et helt tal. Det er derfor nødvendigt at indføre nogle flere tal, nemlig brøkerne, dvs. tal som f.eks. $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{3}$ og $-\frac{7}{13}$.

Brøker er ikke helt så nemme at arbejde med som hele tal; hvordan lægger man f.eks. $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{3}$ sammen? De metoder, man anvender til det, kan faktisk udledes af alt det ovenstående. Da der er en del at argumentere for, følger det dog først i et senere afsnit.

Fortegn

Man kan se division som en skjult multiplikation. Regnestykket $\frac{6}{2} = 3$ kan også skrives på følgende måde

$$6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \; .$$

Men hvis division kan laves om til multiplikation, så må der gælde de samme fortegnsregler ved division som ved multiplikation.

Tabel 1.3: Fortegnsregler for division.

Regel	Eksempel
$\frac{(+)}{(+)} = (+)$	$\frac{6}{2} = 3$
$\frac{(+)}{(-)} = (-)$	$\frac{10}{-5} = -2$
$\frac{(-)}{(+)} = (-)$	$\frac{-14}{2} = -7$
$\frac{(-)}{(-)} = (+)$	$\frac{-18}{-3} = 6$

Altså må f.eks.

$$\frac{-20}{5} = -4, \qquad \frac{14}{-2} = -7 \qquad \text{og} \qquad \frac{-18}{-6} = 3\,.$$

Fortegnsreglerne for division kan ses samlet i tabel 1.3.

Decimaltal

Ofte bliver tal, som ikke er hele, skrevet som decimaltal i stedet for som brøker. Et eksempel på et decimaltal kunne være 1,472. Dette tal kunne f.eks. være længden af et bord målt i meter.

I princippet er et decimaltal en slags sum af brøker, idet

$$1{,}472 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{2}{1000}\,.$$

Dette behøver man dog ikke tænke på, hver gang man anvender decimaltal.

I praksis kan ethvert tal skrives som decimaltal, f.eks. er

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 0{,}5 \\ \frac{1}{3} &= 0{,}333333333\ldots \\ \frac{10}{7} &= 1{,}42857\,142857\,142857\ldots \end{aligned}$$

Som man kan se af de nederste to tal i eksemplet, har man dog nogle gange brug for at skrive uendeligt mange decimaler for at skrive tallet præcist som decimaltal. En brøk kan altså regnes for at være mere præcist end et decimaltal.[6]

[6] Dette gælder også f.eks. for $\frac{1}{2}$. Selv om dette kan skrives som 0,5 er det mere præcist at skrive $\frac{1}{2}$. Skriver man 0,5 kan læseren ikke se, om tallet rent faktisk har uendeligt mange 0'er efter 5-tallet, eller man har rundet af fra f.eks. 0,496.

En anden ting, man kan se af eksemplet, er, at selvom f.eks. $\frac{10}{7}$ ikke kan skrives præcist som decimaltal, så er der dog et mønster i decimalerne. Det er den samme række af tal, der bliver gentaget. Det gælder for alle tal, der kan skrives som en brøk, at når man skriver dem som decimaltal, vil de enten have et endeligt antal decimaler eller de vil gentage det samme mønster i det uendelige. Sådanne tal kaldes *rationale tal.*

Irrationale tal

Hvis man skriver en brøk om til et decimaltal, så får man enten et endeligt antal decimaler, eller et uendeligt antal decimaler med et gentagende mønster.

Heraf følger, at hvis man har et decimaltal med et uendeligt antal decimaler, som ikke har et mønster i decimalerne, så kan det pågældende tal ikke skrives som en brøk.

Men kan man overhovedet forestille sig, at der findes tal, som ikke kan skrives som en brøk? Det viser sig, at der faktisk findes uendeligt mange af sådanne tal.

Et meget kendt eksempel er tallet π, der er forholdet mellem diameteren og omkredsen i en cirkel.[7] Med 20 decimaler er

[7] Det er en udbredt misforståelse, at tallet π er lig $\frac{22}{7}$. Men $\frac{22}{7}$ er blot en tilnærmelse; faktisk er π og $\frac{22}{7}$ forskellige allerede efter 3. decimal.

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots\ .$$

Her ses intet mønster i decimalerne, og det kommer der heller ikke, uanset hvor mange decimaler, man regner ud.

De tal, som ikke kan skrives som brøker, kaldes for de *irrationale tal*. De rationale og de irrationale tal udgør tilsammen de tal, man kalder de *reelle tal*. Hvis man forestiller sig tallene som punkter på en tallinje, så udgår de reelle tal *alle* tallene på linjen.

Ud fra ovenstående gennemgang kan man nu inddele tallene i forskellige grupper:

De naturlige tal tælletallene, $1, 2, 3, 4, \ldots$.

De hele tal som også inkluderer de negative: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.

De rationale tal alle de tal, der kan skrives som brøker — også negative.[8]

De reelle tal alle tal.

[8] De hele tal er også rationale, idet ethvert helt tal kan skrives som en brøk; f.eks. er $4 = \frac{8}{2}$ og $-5 = \frac{-15}{3}$.

1.5 Potenser og rødder

Ligesom $4 \cdot 3$ kan ses som en kort måde at skrive $4 + 4 + 4$ på, har man en måde at skrive f.eks. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ på. Da der er fire 5-taller, der ganges sammen, skriver man i stedet 5^4. Altså[9]

$$5^4 = \overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}^{4\text{ gange}}\,.$$

[9] Tallet 5 kaldes her *grundtallet* og 4 kaldes *eksponenten*.

5^4 kaldes »5 i fjerde« eller »den 4. potens af 5«.

Den modsatte regneoperation kaldes *roduddragning*. Man kan f.eks. beregne[10]

$\sqrt[4]{81}$	den fjerde rod af 81,
$\sqrt[3]{125}$	den tredje rod af 125,
$\sqrt[5]{32}$	den femte rod af 32,
$\sqrt{49}$	kvadratroden af 49.

[10] Bemærk, at det ikke hedder »den anden rod« men *kvadratroden*, og at man her ikke skriver 2-tallet. Man skriver altså $\sqrt{49}$ og ikke $\sqrt[2]{49}$.

Resultatet af regnestykkerne er

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{81} &= 3 &\quad& \text{fordi } 3^4 = 81\\
\sqrt[3]{125} &= 5 && \text{fordi } 5^3 = 125\\
\sqrt[5]{32} &= 2 && \text{fordi } 2^5 = 32\\
\sqrt{49} &= 7 && \text{fordi } 7^2 = 49\ .
\end{aligned}$$

Der er en masse regneregler, man kan bruge, når man regner med potenser og rødder; disse gemmes til et senere afsnit.

1.6 Regningsarternes hierarki

Når man skal udføre et regnestykke som f.eks. $7 + 5 \cdot 3^2$, bliver man nødt til at vide i hvilken rækkefølge, man skal udføre de forskellige trin. Skal man f.eks. lægge 7 og 5 sammen først, eller skal man udregne 3^2 først?

Derfor har man nogle regler for, hvilken rækkefølge man skal regne i, sådan at man kan sikre sig, at alle får samme (og rigtige) resultat ud af et regnestykke.[11]

[11] Rækkefølgen af regneoperationer følger af, at udregninger skal give logisk mening. At man skal gange, før man lægger sammen, kan man f.eks. se ved at huske, at $4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4$. Derfor må

$$2 + 4 \cdot 3 = 2 + 4 + 4 + 4 \,,$$

og derfor bliver man nødt til at gange sammen først (med mindre man vil skrive alle gangestykkerne om til plusstykker).

Sætning 1.1: Regningsarternes hierarki

Når man skal udføre et regnestykke, skal udregningerne foregå i denne rækkefølge:

1. Først udføres potensopløftning og roduddragning.
2. Dernæst udføres multiplikation (gange) og division.
3. Til sidst lægger man sammen og trækker fra.

Denne rækkefølge kan kun ændres ved brug af parenteser. Står en del af en udregning i parentes, skal den betragtes som et lille regnestykke for sig selv, som altid skal udregnes *først*.

Et par eksempler på udregninger kunne være,

Eksempel 1.2 Et eksempel på anvendelse af regningsarternes hierarki:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 17 - 4 \cdot 2^3 &= 2 \cdot 17 - 4 \cdot 8 && \text{Først beregnes potensopløfning.} \\ &= 34 - 32 && \text{Så ganges der.} \\ &= 2 && \text{Til sidst trækkes der fra.} \end{aligned}$$

Eksempel 1.3 Et eksempel, hvor der indgår parenteser:

$$\begin{aligned} (6 + 2) \cdot 5 + 3 \cdot \sqrt{16} &= 8 \cdot 5 + 3 \cdot \sqrt{16} && \text{Parentesen udregnes først.} \\ &= 8 \cdot 5 + 3 \cdot 4 && \text{Så uddrages rødder.} \\ &= 40 + 12 && \text{Dernæst ganger man.} \\ &= 52 && \text{Til sidst lægger man sammen.} \end{aligned}$$

Man kan altså komme igennem et regnestykke ved at følge hierarkiet fra øverst til nederst og tage hensyn til eventuelle parenteser.

Skjulte parenteser

Når der i foregående afsnit tales om parenteser, gælder det også i de tilfælde, hvor man måske ikke umiddelbart tænker over, at der faktisk står en parentes.

I et regnestykke som $\frac{3+17}{10}$ er det givet, at man skal udregne $3 + 17$ først. Når en division er skrevet vha. en brøkstreg bliver der altså på sin vis introduceret parenteser, som man skal tage hensyn til, når man gennemfører udregningen.

Det samme står man overfor, når man uddrager rødder. F.eks. skal man i regnestykket $\sqrt{17-8}$ beregne $17-8$, før man tager kvadratroden.

Eksempel 1.4 I de følgende fire regnestykker er det vist eksplicit, hvor man skal sætte de parenteser, som er underforståede:

$$\begin{aligned}
\frac{3+9}{4} &= \frac{(3+9)}{4} \\
\frac{50}{7-2} &= \frac{50}{(7-2)} \\
7^{2+1} &= 7^{(2+1)} \\
\sqrt{7+9} &= \sqrt{(7+9)} \\
\sqrt[5-2]{8} &= \sqrt[(5-2)]{8}\,.
\end{aligned}$$

Det er vigtigt at huske disse parenteser, når man regner; især hvis man taster regnestykket ind på en lommeregner.

Eksemplet er ikke udtømmende, der kan sagtens findes andre typer af regnestykker, hvor der er en underforstået parentes. Som hovedregel gælder, at hvis noget ligner en afgrænset del af en udregning, så er det det nok også.

1.7 Øvelser

Øvelse 1.1
Udregn resultatet af de følgende regnestykker:

a) $12-5$ b) $2-6$

c) $15-6-7$ d) $7-(-8)$

Øvelse 1.2
Beregn resultatet af de følgende regnestykker:

a) $5\cdot(-3)$ b) $7\cdot 2$

c) $-8\cdot(-4)$ d) $\dfrac{-12}{4}$

e) $\dfrac{22}{-11}$ f) $\dfrac{-18}{-3}$

Øvelse 1.3
Beregn resultatet af de følgende regnestykker:

a) 3^4 b) 6^2

c) $\sqrt[3]{27}$ d) $\sqrt[4]{16}$

Øvelse 1.4
Beregn resultatet af de følgende regnestykker:

a) $3-4\cdot 2$

b) $5\cdot 3^2$

c) $11-2\cdot(8+3)-\dfrac{16}{8}+1$

d) $9\cdot(-2)+10\cdot 3-\dfrac{6}{2}\cdot\left(3\cdot 2-5\cdot\dfrac{14}{7}\right)$

Brøkregning 2

En brøk er et tal, der betegner et antal dele af en enhed. En brøk skrives som to hele tal med en vandret streg imellem:

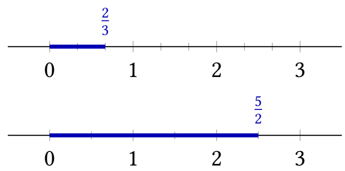
$$\frac{2}{3}\,, \quad \frac{7}{4}\,, \quad \frac{-13}{29}\,.$$

Den vandrette streg kaldes en *brøkstreg*, det øverste tal kaldes *tælleren*, og tallet under brøkstregen kaldes *nævneren.*[1]

[1]Tæller og nævner kan være hvilke som helst hele tal, også negative; dog må nævneren ikke være 0.

Brøken $\frac{2}{3}$ er den størrelse, man får, når man deler 1 hel i 3 dele, og tager 2 af dem. En brøk kan også fortolkes som det præcise resultat, man får, når man dividerer tælleren med nævneren.

Hvis man skal visualisere størrelsen af en brøk i forhold til de hele tal, kan det gøres vha. tallinjen (se figur 2.1).



Figur 2.1: De to tal $\frac{2}{3}$ og $\frac{5}{2}$ placeret på tallinjen.

2.1 At forkorte og forlænge

Hvis en brøk kan fortolkes som det resultat, man får, når man dividerer tæller med nævner, så kan man jo forestille sig, at regnestykket »går op«, dvs. resultatet bliver et helt tal. Nogle brøker kan altså skrives om til hele tal, f.eks.[2]

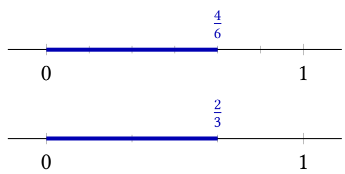
$$\frac{10}{5} = 2\,, \qquad \frac{36}{9} = 4\,, \qquad \frac{-27}{3} = -9\,.$$

[2]Omvendt kan de hele tal forstås som de brøker, der har den underforståede nævner 1, f.eks $8 = \frac{8}{1}$.

Selvom regnestykket ikke går op, så er det nogle gange muligt at gøre tæller og nævner mindre; det kalder man at *forkorte* brøken. Det kan man, når der findes et tal, som går op i både brøkens tæller og nævner.

Situationen er illustreret på figur 2.2. Her kan man se, at $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Det kan man også regne sig frem til, hvis man opdager, at tallet 2 går op i både tæller og nævner i brøken $\frac{4}{6}$. Da en brøk er et udtryk for forholdet mellem tæller og nævner, ændrer den ikke størrelse, hvis tæller og nævner deles med samme tal. Altså er

$$\frac{4}{6} = \frac{4/2}{6/2} = \frac{2}{3}\,.$$



Figur 2.2: Man kan se ud af de to tallinjer, at $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Man ændrer ikke brøkens værdi ved at forkorte. Tallet har præcis samme størrelse som før, man har blot gjort det mere læsevenligt og nemmere at regne med, idet tæller og nævner er blevet mindre.

Eksempel 2.1 Et par yderligere eksempler på, hvordan man forkorter brøker:

$$\frac{15}{36} = \frac{15/3}{36/3} = \frac{5}{12}\,,$$
$$\frac{24}{56} = \frac{24/8}{56/8} = \frac{3}{7}\,,$$
$$\frac{27}{18} = \frac{27/9}{18/9} = \frac{3}{2}\,.$$

Når man kan dividere med samme tal i tæller og nævner uden at ændre brøkens værdi, så kan man også gange.[3] Herved bliver både tæller og nævner større, og det virker ikke umiddelbart smart; men det viser sig at være brugbart, når man skal lægge brøker sammen – mere om det i næste afsnit.

[3] Det er vigtigt at huske, at man skal dividere eller gange med *samme tal* i *både* tæller og nævner. Ellers ændrer man brøkens værdi.

Her vises blot et par eksempler på, hvordan man *forlænger* en brøk.

Eksempel 2.2 Hvis man forlænger $\frac{3}{4}$ med 5, får man

$$\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5} = \frac{15}{20}\,.$$

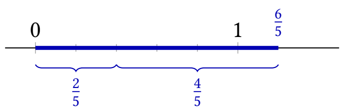
Forlænger man $\frac{8}{5}$ med 3, får man

$$\frac{8}{5} = \frac{8\cdot 3}{5\cdot 3} = \frac{24}{15}\,.$$

2.2 Addition og subtraktion

Det viser sig, at man kun kan lægge brøker sammen, hvis de har samme nævner. Hvis det er tilfældet, lægger man blot tællerne sammen. F.eks. er

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2+4}{5} = \frac{6}{5}\,.$$



Figur 2.3: Regnestykket $\frac{2}{5}+\frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ illustreret på tallinjen.

Dette regnestykke er illustreret på figur 2.3.

Uanset hvor meget man gerne vil, kan man ikke lægge brøker sammen, der har forskellige nævnere. Ikke desto mindre ville det være rart at kunne beregne f.eks. $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$. Hvis man kun kan lægge brøker sammen, der har samme nævner, må man derfor på en eller anden måde sørge for, at de to brøker *får* samme nævner.

Dette gør man ved at forlænge brøkerne. I tilfældet $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ kan man forlænge $\frac{1}{4}$ med 3 og $\frac{2}{3}$ med 4; så får man

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1\cdot 3}{4\cdot 3} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 4} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}\,.$$

Når man forlænger på denne måde, får begge brøkerne nævneren 12, og man kan så lægge dem sammen.

I regnestykket ser man, at man forlænger den ene brøk med den andens nævner (og omvendt). Denne teknik virker altid.[4]

[4] Men det er ikke altid nødvendigt. Nogle gange kan man nøjes med at forlænge med to mindre tal og stadig få samme nævner på de to brøker.

Eksempel 2.3 Et par eksempler på, hvordan man lægger brøker sammen:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}\,,$$
$$\frac{7}{4}+\frac{2}{11}=\frac{7\cdot 11}{4\cdot 11}+\frac{2\cdot 4}{11\cdot 4}=\frac{77}{44}+\frac{8}{44}=\frac{85}{44}\,,$$
$$\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}+\frac{1}{10}=\frac{6}{10}+\frac{1}{10}=\frac{7}{10}\,.$$

I den sidste udregning ses, at det ikke altid er nødvendigt at forlænge begge brøker for at få fælles nævner.[5]

[5]Det er ofte en fordel at forlænge med så små tal, som overhovedet muligt, fordi små tal simpelthen er nemmere at regne med.

Hvis man skal trække brøker fra hinanden, så fungerer det på samme måde, som når man lægger sammen. Man kan kun trække en brøk fra en anden brøk, hvis de har samme nævner. F.eks.

$$\frac{8}{13}-\frac{3}{13}=\frac{8-3}{13}=\frac{5}{13}\,.$$

Har de to brøker ikke samme nævner, så må man forlænge, sådan at de får den samme nævner.

Eksempel 2.4 Her er tre eksempler på, hvordan man trækker brøker fra hinanden.

$$\frac{4}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4\cdot 5}{3\cdot 5}-\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{20}{15}-\frac{6}{15}=\frac{14}{15}\,,$$
$$\frac{7}{8}-\frac{1}{2}=\frac{7}{8}-\frac{1\cdot 4}{2\cdot 4}=\frac{7}{8}-\frac{4}{8}=\frac{3}{8}\,,$$
$$\frac{2}{3}-\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}-\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{10}{15}-\frac{12}{15}=\frac{-2}{15}\,.$$

Det er i øvrigt god stil at forkorte resultatet så meget som muligt (hvis det kan forkortes).

2.3 Multiplikation og division

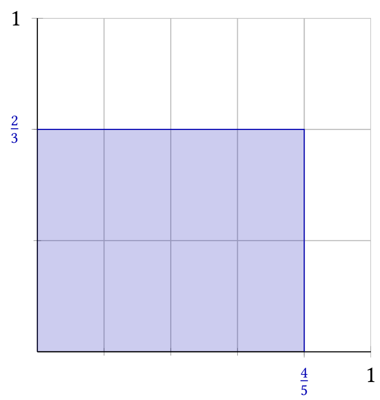
En af de måder, man kan finde ud af, hvordan man ganger tal sammen på, er ved at betragte produktet som et areal. Man finder som bekendt arealet af et rektangel ved at gange længden med bredden. Resultatet af et regnestykke som $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$ vil altså være arealet af et rektangel, som er $\frac{4}{5}$ langt og $\frac{2}{3}$ bredt.

På figur 2.4 kan man se resultatet af regnestykket illustreret. Her ses, at

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}\,.$$

Hvis man ser nærmere på figuren, kan man se, at antallet af fyldte rektangler (resultatets tæller) fås ved at gange de to tællere (4 og 2) sammen. Antallet af små rektangler som 1 hel deles op i finder man ved at gange de to nævnere (5 og 3). Samlet set er altså

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{8}{15}\,.$$



Figur 2.4: Illustration af $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$.

Brøker bliver altså ganget sammen, ved at man ganger tæller med tæller og nævner med nævner.

Eksempel 2.5 Et par eksempler på gangestykker:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 7}=\frac{15}{14}\,,$$
$$\frac{4}{9}\cdot\frac{7}{11}=\frac{4\cdot 7}{9\cdot 11}=\frac{28}{99}\,,$$
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{13}{7}=\frac{1\cdot 5\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 7}=\frac{65}{42}\,.$$

Den sidste type regnestykke, der gennemgås i dette kapitel er division. Som eksempel kan man se på regnestykket

$$\frac{4}{7}\Big/\frac{2}{5}\,.$$

For at finde ud af, hvad dette giver er det nødvendigt først at konstatere, at[6]

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}=\frac{2\cdot 5}{5\cdot 2}=\frac{10}{10}=1\,.$$

[6]Dette regnestykke er udtryk for en generel regel: Når man ganger en brøk med dens omvendte, bliver resultatet 1.

Hvis man tager det oprindelige regnestykke $\frac{4}{7}\big/\frac{2}{5}$ og ganger det med 1, så ændrer man ikke noget ved resultatet, dvs. man kunne lige så godt have skrevet

$$\frac{4}{7}\Big/\frac{2}{5}\cdot 1\,.$$

Men når man ved, at $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}=1$, så kan man også skrive det som

$$\frac{4}{7}\Big/\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}\right)\,.$$

Rækkefølgen, man ganger og dividerer i, er uden betydning. Så man kan uden videre flytte parentesen, så der i stedet står

$$\left(\frac{4}{7}\Big/\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{5}{2}\,.$$

Nu står der inde i parentesen, at $\frac{4}{7}$ skal divideres med $\frac{2}{5}$, hvorefter man skal gange med $\frac{2}{5}$. Da division og multiplikation virker modsat hinanden, gør det i virkeligheden intet ved tallet $\frac{4}{7}$. Man kan derfor i virkeligheden fjerne det, og nøjes med at skrive

$$\left(\frac{4}{7}\right)\cdot\frac{5}{2}\,,$$

som er det samme som $\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{2}$.

Hele vejen igennem er der regnet på det samme regnestykke. Derfor må man kunne konkludere, at

$$\frac{4}{7}\Big/\frac{2}{5}=\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{2}\,.$$

Man dividerer altså med en brøk ved at gange med den omvendte brøk.

Eksempel 2.6 Et par eksempler:

$$\frac{3}{8}\bigg/\frac{7}{5} = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} = \frac{15}{56}\,,$$
$$\frac{1}{2}\bigg/\frac{11}{5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{11} = \frac{5}{22}\,,$$
$$\frac{7}{6}\bigg/\frac{3}{13} = \frac{7}{6}\cdot\frac{13}{3} = \frac{91}{18}\,.$$

2.4 Hele tal og brøker

Hvis der indgår hele tal i en udregning med brøker, så er den nemmeste måde at regne videre på simpelthen at lave de hele tal om til brøker. Dette kan man gøre ved at give dem nævneren 1. F.eks. er

$$8 = \frac{8}{1}, \qquad 12 = \frac{12}{1} \qquad \text{og} \qquad -3 = \frac{-3}{1}\,.$$

Herefter bliver regnestykkerne nemmere, idet man jo nu kun har brøker.

Eksempel 2.7 Som eksempel kan man se på regnestykket $2+\frac{3}{4}$. Laver man 2-tallet om til en brøk, får man

$$\frac{2}{1}+\frac{3}{4}\,.$$

For at man kan lægge de to brøker sammen, skal de have fælles nævner. Det kan man få ved at forlænge $\frac{2}{1}$ med 4:

$$\frac{2}{1}+\frac{3}{4} = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 4}+\frac{3}{4} = \frac{8}{4}+\frac{3}{4} = \frac{11}{4}\,.$$

Resultatet er altså $\frac{11}{4}$.

Eksempel 2.8 Hvis man skal udføre divisionen $\frac{4}{3}\big/5$, så laves 5-tallet om til brøken $\frac{5}{1}$. Så er

$$\frac{4}{3}\bigg/\frac{5}{1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{15}\,.$$

2.5 Lidt om fortegn

Hvis man skal regne med fortegn i brøkregnestykker, foregår det på nøjagtigt samme måde, som når man dividerer, idet en brøk kan fortolkes som en division.

Når man dividerer et positivt tal med et negativt eller et negativt med et positivt, er resultatet negativt.

Derfor er f.eks.

$$\frac{-6}{11} = \frac{6}{-11}\,.$$

Man skriver derfor som regel fortegnet uden for brøken, dvs.

$$-\frac{6}{11}\,.$$

Når der står et minus uden for brøken, betyder det altså blot, at resultatet er negativt; og da man får samme resultat, hvad enten minusset sættes på tælleren eller nævneren, er det i princippet ligegyldigt, hvor minusset står, *så længe der kun er ét.*

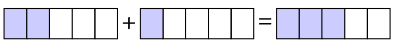
Er der placeret et minus på både tæller og nævner, dividerer man to negative tal med hinanden, og så bliver resultatet positivt. Altså

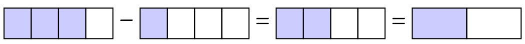
$$\frac{-13}{-7} = \frac{13}{7} \,.$$

Hvis man har et længere gange- og divisionsstykke, kan man afgøre fortegnet for resultatet ved at huske, at alle par af minusser »forsvinder«. Hvis der er et *lige* antal minusser i regnestykket, bliver resultatet positivt, er antallet af minusser *ulige*, bliver resultatet negativt.

2.6 Øvelser

Øvelse 2.1
Skriv billederne om til regnestykker med brøker:

a) 

b) 

Øvelse 2.2
Beregn og skriv resultatet som en uforkortelig brøk.

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{3} + \frac{7}{9}$

c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{9}$ d) $\frac{3}{7} + \frac{11}{3}$

e) $\frac{2}{9} + \frac{5}{6}$ f) $\frac{15}{4} - \frac{1}{6}$

Øvelse 2.3
Forkort brøkerne mest muligt.

a) $\frac{24}{32}$ b) $\frac{112}{200}$

c) $\frac{63}{77}$ d) $\frac{17}{136}$

Øvelse 2.4
Beregn, og angiv resultatet som en uforkortelig brøk.

a) $\frac{5}{8} - \frac{13}{20} - \frac{3}{15}$ b) $\frac{11}{9} - \frac{7}{18} + \frac{4}{27}$

c) $\frac{4}{5} + \frac{7}{3} - \frac{5}{4}$ d) $\frac{3}{6} - \frac{12}{16} - \frac{3}{8}$

e) $\frac{4}{9} - \frac{7}{6} + \frac{12}{9}$ f) $\frac{5}{7} + \frac{3}{21} - \frac{2}{14}$

Øvelse 2.5
Beregn, og angiv resultatet som en uforkortelig brøk.

a) $\frac{2}{3} \cdot 5 + 7 \cdot \frac{1}{2}$ b) $-\frac{3}{2} \cdot 8 + \frac{\frac{7}{2}}{3}$

Øvelse 2.6
Beregn, og angiv resultatet som en uforkortelig brøk.

a) $\frac{9}{14} + \frac{3}{4} - \frac{2}{7}$ b) $3 \cdot \frac{3}{13} - \frac{\frac{4}{7}}{2} + \frac{2}{3}$

c) $\frac{\frac{5}{3}}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} - 32 \cdot \frac{1}{7}$ d) $\frac{3}{4} - \frac{\frac{1}{5}}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{3}$

Potenser og rødder

3

I dette kapitel beskrives nogle af de regneregler, der gælder for potenser og rødder. Først gennemgås potenser med heltallig eksponent, derefter ses på, hvordan dette kan udvides til også at omfatte eksponenter, som er brøker eller negative tal.

3.1 Heltallige eksponenter

Potensopløftning virker som bekendt på følgende måde:[1]

$$3^5 = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{\text{5 gange}} \ .$$

Roduddragning er den modsatte regneoperation, så f.eks. er

$$\sqrt[4]{16} = 2, \qquad \text{fordi } 2^4 = 16 \ .$$

Hvis man ganger to potenser med samme grundtal, kan man f.eks. gøre følgende:

$$7^2 \cdot 7^4 = \overbrace{\underbrace{7 \cdot 7}_{\text{2 gange}} \cdot \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{\text{4 gange}}}^{2+4=\text{6 gange}} = 7^6 \ .$$

Dividerer man to potenser med samme grundtal, kan man lave en udregning som denne:

$$\frac{4^5}{4^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}} = 4 \cdot 4 = 4^2 \ ,$$

dvs.

$$\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} \ .$$

Har man to potensopløftninger efter hinanden, får man:

$$(2^4)^3 = \overbrace{\underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{4 gange}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{4 gange}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{4 gange}}}^{\text{3 gange à 4}} = 2^{4 \cdot 3} = 2^{12} \ .$$

Når man har set på, hvad der sker, når man regner på to potenser med samme grundtal, er det næste, man kan se på, hvad der sker, når man har to potenser med samme eksponent.

[1] I regnestykket 3^5 kaldes 3 for *grundtallet* og 5 kaldes *eksponenten.*

Ganger man to potenser med samme eksponent, kan man f.eks. få følgende:

$$5^3 \cdot 2^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) = (5 \cdot 2)^3 \ .$$

Ved division, sker dette:

$$\frac{7^4}{3^4} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} = \left(\frac{7}{3}\right)^4 \ .$$

Alle disse udregninger kan generaliseres til 5 regneregler for potenser.

Sætning 3.1

Hvis m og n er to naturlige tal og a og b er to vilkårlige tal, gælder følgende

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. Hvis a er forskellig fra 0 og $m > n$ er $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.
5. Hvis b er forskellig fra 0 er $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

3.2 Det udvidede potensbegreb

I dette afsnit udvides potensbegrebet til også at omfatte eksponenter, som ikke er hele, positive tal. Her opstår der et interessant spørgsmål: Hvad der menes med 5^4 er til at forstå; men hvordan skal man fortolke f.eks. 2^{-7} eller $3^{\frac{1}{4}}$?

Det, man gør i praksis for at definere, hvordan disse »skæve« eksponenter skal forstås, er at kræve, at regnereglerne i sætning 3.1 skal gælde, uanset hvilke værdier eksponenterne har. Ud fra dette finder man, at potensopløftning, hvor eksponenten er et negativt tal eller en brøk, kun kan fortolkes på én måde.

Regner man f.eks. på 5^0, finder man vha. regel 2 i sætning 3.1, at

$$5^0 = 5^{2-2} = \frac{5^2}{5^2} = 1 \ .$$

Man kunne her lige så godt have set på et andet grundtal end 5; vha. samme type udregning kan man f.eks. vise, at $7^0 = 1$. Udregningen vil altså kunne generaliseres til alle tal.[2]

Har man en potensopløftning med en negativ eksponent, kan man igen udnytte samme regneregel og få[3]

$$6^{-3} = 6^{0-3} = \frac{6^0}{6^3} = \frac{1}{6^3} \ .$$

Dette regnestykke kan også gennemføres med andre tal, så man f.eks. finder, at $13^{-7} = \frac{1}{13^7}$. Argumentet går godt for alle grundtal bortset fra 0.

[2] Bortset fra 0, da man ikke må dividere med 0.

[3] Her udnytter man, at det lige er vist, at $5^0 = 1$, $6^0 = 1$, $43^0 = 1$, osv.

For at man kan sige noget om potensopløftning med brøker som eksponent, kan man bruge regel 3 i sætning 3.1, til at beregne f.eks. $(8^{\frac{1}{3}})^3$. Det giver

$$(8^{\frac{1}{3}})^3 = 8^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 8^1 = 8\ .$$

Men der gælder også, at[4]

$$(\sqrt[3]{8})^3 = 8\ .$$

Derfor må

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}\ .$$

Dette kan forklare, hvordan man skal fortolke situationen, hvis eksponenten er $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$ eller $\frac{1}{73}$; men det siger intet om, hvad der sker, hvis eksponenten er en brøk, hvor tælleren ikke er 1.

Hvis man udnytter de kendte regneregler får man f.eks.

$$4^{\frac{5}{7}} = 4^{5\cdot\frac{1}{7}} = (4^5)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{4^5}\ .$$

Dvs. hvis eksponenten så svarer potensopløftningen altså til at opløfte i et helt tal og uddrage en rod.

Skal potensregnereglerne gælde for alle tal, har man derfor følgende definition.

Definition 3.2

Der gælder følgende definitioner.

1. $a^0 = 1$ (hvis $a \neq 0$).
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (hvis $a \neq 0$).
3. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Denne definition på potenser virker måske en smule mærkelig, men den er nødvendig for at de samme regneregler skal gælde for de udvidede potenser, som der gælder for de simple potenser – jf. gennemgangen ovenfor.

Når man definerer de udvidede potenser på denne måde, ved man altså med sikkerhed, at de samme regneregler gælder, uanset om eksponenten er et helt tal eller ej, dvs. man har følgende sætning:

Sætning 3.3

Der gælder følgende regneregler

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
2. $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$.
3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
4. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.
5. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

Da roduddragning i virkeligheden er et specialtilfælde af potensopløftning, kan man også udlede følgende sætning.[5]

[4] Fordi roduddragning er det modsatte af potensopløftning.

[5] De to regneregler følger af, at f.eks.

$$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2} = 5^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}} = (5\cdot 2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5\cdot 2}$$

$$\frac{\sqrt[7]{4}}{\sqrt[7]{11}} = \frac{4^{\frac{1}{7}}}{11^{\frac{1}{7}}} = \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{\frac{4}{11}}\ .$$

Sætning 3.4

Hvis $a > 0$ og $b > 0$, gælder der

1. $\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{a \cdot b}$.
2. $\dfrac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}} = \sqrt[x]{\dfrac{a}{b}}$.

I sætning 3.4 er der ingen regneregel for de to udtryk $\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[y]{a}$ og $\frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[y]{a}}$. Det skyldes, at det i dette tilfælde altid er nemmest at omskrive til potensopløftning, før man reducerer.

Hvis man vil, er det dog muligt at reducere de to udtryk og udlede en formel. Dette overlades som en øvelse til læseren.

3.3 Øvelser

Øvelse 3.1
Reducer følgende udtryk ved hjælp af potensregneregler.

a) $5^2 \cdot 5^3$ b) $2^4 \cdot 2^5$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ d) $\frac{3^6}{3^4}$
e) $\frac{(\frac{2}{3})^7}{(\frac{2}{3})^6}$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{3}{2}\right)^4$
g) $2^6 \cdot 5^6$ h) $\frac{12^3}{2^3}$
i) $\frac{35^4}{5^4}$ j) $\frac{4^2}{(\frac{1}{2})^2}$
k) $(3^4)^5$ l) $\left(\left(\frac{2}{7}\right)^3\right)^3$

Øvelse 3.2
Afgør, uden hjælpemidler, i hvert af nedenstående tilfælde, om udtrykket er defineret (dvs. giver mening). Reducér det i givet fald.

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[3]{-64}$
c) $\sqrt{(-4)^2}$ d) $\sqrt{-4^2}$
e) $\sqrt[3]{125}$ f) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$
g) $\sqrt[4]{-81}$ h) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$
i) $\frac{1}{\sqrt[3]{216}}$ j) $\sqrt[4]{\frac{1}{10000}}$
k) $\sqrt{8}\sqrt{32}$ l) $\sqrt{45}\sqrt{5}$
m) $\sqrt{-3}\sqrt{-3}$ n) $\frac{\sqrt{135}}{\sqrt{15}}$
o) $\sqrt{\frac{-8}{-2}}$ p) $\sqrt{-0}$

Øvelse 3.3
Angiv uden brug af hjælpemidler følgende rødder – hvis de eksisterer.

a) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ b) $\sqrt{3^2 + 4^2}$
c) $\sqrt{3 \cdot 12}$ d) $\sqrt{13 + 3 \cdot 4}$
e) $\sqrt{-4^2 + 2^3}$ f) $\sqrt{12^2 + 5^2}$
g) $\sqrt[3]{(-2)^6}$ h) $\sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2}$

Øvelse 3.4
Udregn, uden brug af hjælpemidler, følgende tal

a) $49^{\frac{1}{2}}$ b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$
c) $27^{\frac{-1}{3}}$ d) 64^0
e) $-64^{\frac{1}{3}}$ f) $(3^2)^0$
g) $(-27)^{\frac{-1}{3}}$ h) $81^{\frac{1}{4}}$
i) $\left(\frac{1}{3}\right)^0$ j) 4^{-2}
k) $9^{-\frac{1}{2}}$ l) 100023^0

Øvelse 3.5
Udregn tallene

a) $-1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^{2006}$
b) $(-1)^2 + (-1)^4 + (-1)^6 + \cdots + (-1)^{2006}$
c) $(1 - 1 + 1)^6 - (-1 + 1 - 1)^4 - (1 - 1 + 1)^2$

4 Algebra

Algebra er en samlet betegnelse for de regler, der gælder, når man regner med tal. I matematikken har man nogle gange brug for at regne med tal, hvis værdi man ikke kender. Sådanne tal kaldes »ubekendte«. I stedet for det ukendte tal skriver man et bogstav, f.eks. x, y, a eller A.[1]

[1] I matematikken skelner man mellem store og små bogstaver – a og A er altså ikke det samme tal.

Hvis man har et regnestykke, hvori der indgår tal, man ikke kender, kan man af gode grunde ikke beregne et endeligt resultat. Men man kan nogle gange forsimple regnestykket, så man ikke skal regne nær så meget, når man endelig får det ukendte tals værdi at vide.

Idet f.eks.

$$5 + 5 + 5 = 3 \cdot 5 \ ,$$

ved man, at

$$x + x + x = 3 \cdot x \ ,$$

uanset hvilken værdi, x har. Ud fra samme betragtning giver f.eks.

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4 \ ,$$

at

$$x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4 \ .$$

Så det, man anvender de algebraiske regler til, er at forsimple regneudtryk og formler, sådan at de bliver nemmere at arbejde med.

De regneregler, man anvender, er som sagt de sædvanlige regneregler for, hvordan man regner med tal. Dette skyldes, at bogstaverne jo netop også *er* tal. Der er dog en enkelt lille detalje i notationen, som er vigtig at vide: I algebraiske udtryk er det normalt, at man ikke skriver gangetegn mellem størrelser, hvis man kan undlade dem og stadig forstå regnestykket.[2] Derfor er

[2] Når man regner med tal, er det nødvendigt at skrive gangetegnene, sådan at man kan skelne 73 fra $7 \cdot 3$. Dette er ikke nødvendigt med f.eks. $7x$.

$$\begin{aligned}
4p &= 4 \cdot p \\
3xy &= 3 \cdot x \cdot y \\
5w^2 &= 5 \cdot w^2 \\
2y^3z &= 2 \cdot y^3 \cdot z \\
7ab^2 &= 7 \cdot a \cdot b^2 \\
2(x + y) &= 2 \cdot (x + y) \\
(5 - x)(2 - x) &= (5 - x) \cdot (2 - x) \ .
\end{aligned}$$

4.1 Ensbenævnte størrelser

Hvis x og x kan lægges sammen til $2x$ kan man også gøre følgende:

$$3x + 4x = \overbrace{x + x + x}^{3 \text{ stk.}} + \overbrace{x + x + x + x}^{4 \text{ stk.}} = 7x \ .$$

Er bogstaverne ens, kan man altså lægge tallene sammen (eller trække dem fra hinanden).

Eksempel 4.1 Et par andre eksempler på, hvordan man lægger størrelser sammen kunne være

$$\begin{aligned} 2x + 5x &= 7x \\ 5p^2 + 11p^2 &= 16p^2 \\ 4y + 7y + 2y &= 13y \\ 8xy - 3xy &= 5xy \\ 7w^3 - 15w^3 &= -8w^3 \ . \end{aligned}$$

Størrelser som $2x$ og $5x$ kaldes *ensbenævnte*. Hvis man har to ensbenævnte størrelser, som er lagt sammen, lægger man dem altså sammen ved at lægge tallene sammen.[3] For at man kan gøre dette, skal bogstaverne være *fuldstændigt* ens. Man kan altså f.eks. ikke lægge $2a$ og $4b$ sammen.

[3]Når man trækker fra, gælder der en tilsvarende regel.

Eksempel 4.2 Da man kun kan lægge led med ensbenævnte størrelser sammen er

$$\begin{aligned} 3x - 8y + 6x &= 3x + 6x - 8y = 9x - 8y \\ 4w + 7u - w + 5uw &= 4w - w + 7u + 5uw = 3w + 7u + 5uw \\ -3y + 4z + 5y - z &= -3y + 5y + 4z - z = 2y + 3z \\ 4x + 3x^2 + 2x &= 4x + 2x + 3x^2 = 6x + 3x^2 \ . \end{aligned}$$

Som det fremgår af ovenstående eksempel er $4x$ og $3x^2$ ikke ensbenævnte størrelser. Det er altså vigtigt, at bogstaverne er fuldstændig ens, også mht. en evt. potensopløftning.[4]

[4]Til gengæld er $3ab$ og ba ensbenævnte størrelser, idet rækkefølgen, man ganger i, er ligegyldig. Dvs. at $ba = ab$. Det samme gælder for eksempel for xy^2 og y^2x; men ikke for yx^2, da det her er det forkerte tal der står i anden potens.

4.2 Parenteser

For at forsimple udtryk anvender man ofte de følgende 3 love, der gælder for addition og multiplikation.

Den kommutative lov: $a + b = b + a$ og $a \cdot b = b \cdot a$.

Den associative lov : $a + (b + c) = (a + b) + c$ og $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Den distributive lov: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Den kommutative lov siger blot, at rækkefølgen er underordnet, når man lægger sammen eller ganger. Den associative lov viser, at nogle parenteser er ligegyldige. F.eks. er

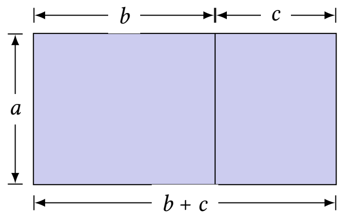
$$8x + (3x + 6x) = (8x + 3x) + 6x \ .$$

Parentesen er derfor ligegyldig, og man kunne lige så godt skrive

$$8x + 3x + 6x \ .$$

Summen af disse tre led er i øvrigt $17x$.

Står der et »+« foran en parentes, kan parentesen altså uden videre fjernes. Det samme gælder ikke, hvis der står et »−«. Hvis man vil vide, hvad man skal gøre i denne situation, får man brug for den distributive lov.



Figur 4.1: Hele arealet af rektanglet er $a \cdot (b+c)$, men man kan også beregne arealet som summen af de to små rektangler, dvs. $a \cdot b + a \cdot c$. Dette betyder, at der må gælde $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Den distributive lov kan man argumentere for vha. figur 4.1, og den viser altså, hvordan man skal gange et tal med en sum.

Hvis man husker, at $-x = (-1)x$, kan man udlede, at

$$a - (b + c) = a + (-1)(b + c) = a + (-1)b + (-1)c = a - b - c \ .$$

Når der står »−« foran en parentes, så kan man altså fjerne parentesen ved at ændre fortegn på alle leddene inde i parentesen.

Eksempel 4.3 Et par eksempler på, hvordan man hæver parenteser kunne være

$$\begin{aligned} x + (8 - 2x) &= x + 8 - 2x \ , \\ 8y - (y + 3) &= 8y - y - 3 \ , \\ 5t + (6 + 2t) &= 5t + 6 + 2t \ , \\ 7p - (1 - 6p) &= 7p - 1 + 6p \ . \end{aligned}$$

Hvis man skal gange en størrelse på en sum anvender man også den distributive lov.

Eksempel 4.4 Et par eksempler på, hvordan man ganger et tal med en sum eller en differens er

$$\begin{aligned} 2(x + 5) &= 2x + 2 \cdot 5 = 2x + 10 \ , \\ x - 8(5 + x) &= x + (-8) \cdot 5 + (-8)x = x - 40 - 8x \ , \\ y(3 + y) &= 3y + y^2 \ . \end{aligned}$$

Et lidt mere avanceret eksempel er

$$\begin{aligned} 5 - ab(3b + a) &= 5 + (-ab) \cdot 3b + (-ab)a = 5 - ab \cdot 3b - aba \\ &= 5 - 3abb - aab = 5 - 3ab^2 - a^2 b \ . \end{aligned}$$

En sidste ting, der kunne være interessant at vide, er, hvad der sker, når man ganger to summer sammen; som f.eks. $(a + b)(c + d)$. Her anvendes den distributive lov to gange, så man får

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd \ .$$

Som man kan se ganges alle led i den første parentes altså med alle led i næste parentes. Dette kan også illustreres på følgende måde:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \ .$$

Alle disse regneregler for parenteser kan sammenfattes i følgende sætning.

Sætning 4.5

For udregninger med parenteser gælder følgende:

1. $a + (b + c) = a + b + c$.
2. $a - (b + c) = a - b - c$.
3. $a(b + c) = ab + ac$.
4. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

At sætte uden for parentes

Nogle gange kan det være en fordel at læse den distributive lov »baglæns«. Sætning 4.5(3) bliver derved til

Sætning 4.6

For de tre tal a, b og c gælder

$$ab + ac = a(b + c)\ .$$

Det man gør, for at omskrive udtrykkene på denne måde er at identificere en størrelse, der går op i alle led. F.eks. er

$$12x + 18y = 6 \cdot 2x + 6 \cdot 3y = 6(2x + 3y)\ .$$

Eksempel 4.7 Flere eksempler på at »sætte uden for parentes« er

$$\begin{aligned} 5x + 15y &= 5x + 5 \cdot 3y = 5(x + 3y)\ , \\ 7a + ab &= a(7 + b)\ , \\ 3pq - 5pq^2 &= 3pq - 5pq \cdot q = pq(3 - 5q)\ . \end{aligned}$$

Eksempel 4.8 Et avanceret eksempel, hvor det viser sig, at man kan sætte $2xy$ uden for parentes, er

$$\begin{aligned} 2x^2y + 4xy^2 - 6xy &= 2xxy + 2 \cdot 2xyy - 3 \cdot 2xy \\ &= 2xy \cdot x + 2xy \cdot 2y - 2xy \cdot 3 = 2xy(x + 2y - 3)\ . \end{aligned}$$

Eksempel 4.9 Man kan få brug for at sætte uden for parentes, når man skal forkorte en brøk. Et eksempel kunne være

$$\frac{6x + 9}{12} = \frac{3(2x + 3)}{12} = \frac{3(2x + 3)\big/3}{12\big/3} = \frac{2x + 3}{4}\ .$$

4.3 Toleddede størrelser

Størrelser som $(a + b)^2$ og $(a - b)^2$ kaldes *kvadratet på en toleddet størrelse*. De hedder sådan, fordi man tager kvadratet på en størrelse, der består af to led.

Når man ganger to parenteser sammen, ganger man alle led i den ene parentes med alle leddene i den anden. Hvis nogle af leddene er de samme er der mulighed for at reducere udtrykket.

Man får så for de to kvadrater, at[5]

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + b^2 + 2ab ,$$

og

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = aa + a(-b) + (-b)a + (-b)(-b) = a^2 + b^2 - 2ab .$$

Hvis fortegnene i de to parenteser er forskellige, har man ikke et kvadrat på en toleddet størrelse. Men resultatet af en sådan multiplikation er alligevel interessant, for man får

$$(a+b)(a-b) = aa + (-b)a + ba + (-b)b = a^2 - b^2 .$$

Læser man nu disse udregninger fra højre mod venstre, får man en matematisk sætning, der fortæller, hvad der skal til, for at noget kan omskrives til et kvadrat på en toleddet størrelse.

Sætning 4.10

Man kan lave følgende omskrivning til et kvadrat på en toleddet størrelse:

1. $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$.
2. $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$.

En differens mellem to kvadrater kan skrives om til et produkt:

3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Her følger et par eksempler på anvendelser af formlerne:

Eksempel 4.11 Man kan læse formlerne fra højre mod venstre og beregne

$$\begin{aligned}
(x+4)^2 &= x^2 + 4^2 + 2x \cdot 4 = x^2 + 16 + 8x ,\\
(6-p)^2 &= 6^2 + p^2 - 2 \cdot 6p = 36 + p^2 - 12p ,\\
(t-3)(t+3) &= t^2 - 3^2 = t^2 - 9 ,\\
(8x-2y)^2 &= (8x)^2 + (2y)^2 - 2 \cdot 8x \cdot 2y = 64x^2 + 4y^2 - 32xy .
\end{aligned}$$

Men formlerne er mest interessant, når man læser dem fra venstre mod højre. Så kan man nemlig regne som i de næste to eksempler.

Eksempel 4.12

$$\begin{aligned}
x^2 + 49 + 14x &= x^2 + 7^2 + 2 \cdot 7x = (x+7)^2 ,\\
4p^2 - 25q^2 &= (2p)^2 - (5q)^2 = (2p+5q)(2p-5q) ,\\
9a^2 + 36 - 36a &= (3a)^2 + 6^2 - 2 \cdot 3a \cdot 6 = (3a-6)^2 .
\end{aligned}$$

Eksempel 4.13 Af og til kan man forkorte brøker, der ikke ser umiddelbart forkortelige ud. F.eks. er

$$\frac{x^2 + 25 - 10x}{4x - 20} = \frac{(x-5)^2}{4(x-5)} = \frac{x-5}{4} .$$

[5] I de følgende udregninger bliver det udnyttet flere steder, at $ab = ba$.

4.4 Øvelser

Øvelse 4.1
Nedenfor er der 3 udtryk. Find leddene i hvert udtryk, og find faktorerne i hvert led.

a) $2x + 4y - xy$
b) $7p^2 + 16pqz - 25$
c) $17xyz + x^{113}y - 17 + y^4 + xy^2$

Øvelse 4.2
Reducer følgende udtryk mest muligt

a) $4(a + 5b) + 7(3a + b)$
b) $x(y + 3) - y(x - 6)$
c) $17x - (14x - (7x + 2))$
d) $(6x - 5y)(3x - 10) - (2x + 7)(9x + 4y)$
e) $4(2x + 7y) - 5(-2y + 4x) + 3(-3x - 5y)$

Øvelse 4.3
Reducer følgende udtryk:

a) $2(x + 3) - 4x$
b) $6(7 + a) - (3 - a)$
c) $12(a - b) + 6(5b - a)$
d) $27(c - 3z) - (-4 + c)$
e) $-2(c + h^2) + h(4 - c)$
f) $\dfrac{12x + 6y}{3} - 7y$
g) $\dfrac{6x + xy}{x} + 2(y + 3)$

Øvelse 4.4
Nedenfor ses 6 forskellige omskrivninger. Der sker det samme i alle 6 tilfælde. Prøv at gennemskue, hvordan der skrives om, og prøv at formulere en generel regel på baggrund af dine observationer.

a) $3x + 3y = 3(x + y)$
b) $6a + 3b = 3(2a + b)$
c) $7c + 14 = 7(c + 2)$
d) $14y + 7 = 7(2y + 1)$
e) $2x + 4y^2 + 18z = 2(x + 2y^2 + 9z)$
f) $3ab + 6ab^2 + 9a^2b = 3ab(1 + 2b + 3a)$

Øvelse 4.5
Sæt så meget som muligt uden for parentes.

a) $3x - x^2$
b) $12p^2 - 6pq$
c) $a^2b - 3a + 7ab^2$
d) $4xy - 6x^2y + 2xy^2$

Øvelse 4.6
Reducer udtrykkene så meget som muligt.

a) $4(2x + 7y) - 5(-2y + 4x) + 3(-3x - 5y)$
b) $6(4a + 7b - 5) - 3(8a + 8b - 2) + (a - 2b + 3) \cdot 9$
c) $\dfrac{a}{2} + \dfrac{5a}{8} + \dfrac{3a}{4}.$
d) $\dfrac{18x + 2}{4y} - \dfrac{5x - 1}{3y}.$
e) $\dfrac{14a^2b^3c}{21a^5bc^4}$

Øvelse 4.7
Reducer følgende udtryk så meget som muligt.

a) $4x - 6y + 2(x + 3y)$
b) $x(x + 2y) - (x + y)^2$
c) $\dfrac{12x^2y^4}{3xy}$

Øvelse 4.8
Reducer udtrykkene mest muligt.

a) $(2x - 3) \cdot 5 + 9 \cdot (y - x) + 3 \cdot (5 - 3y)$
b) $\dfrac{25x^2 - 5x}{10x^2}$
c) $4b \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + \dfrac{5a}{b}$

Øvelse 4.9
Reducer brøkerne så meget som muligt.

a) $\dfrac{10a^2bc^3}{4a^4b^2c}$
b) $\dfrac{7x^2y^4z}{49x^3yz^2}$

Øvelse 4.10
Sæt på fælles brøkstreg og reducer mest muligt.

a) $\dfrac{11x}{18} + \dfrac{5x}{6} + \dfrac{2x}{9}$
b) $\dfrac{3p}{3q} + \dfrac{p}{8q} - 3$
c) $\dfrac{a - (2b - 9)}{a - 2b} - \dfrac{a - (b - 5)}{a - 2b} + \dfrac{a + (b - 4)}{a - 2b}$

Øvelse 4.11
Udregn vha. kvadratet på en to-leddet størrelse

a) $(x + 7)^2$
b) $(2x - 3)^2$
c) $(3q + 2)^2$
d) $(5p^2 - 3x)^2$

5 Ligninger

En ligning består af to regnestykker adskilt af et lighedstegn. Lighedstegnet kan forstås som en påstand om, at de to regnestykker giver samme resultat.

I mindst ét af de to regnestykker indgår et ukendt tal (den ubekendte).[1] En *løsning* til ligningen er et tal, som gør påstanden sand, når det står på den ubekendtes plads.

[1]Der kan godt være flere ubekendte i en ligning; men i det simpleste tilfælde er der kun én.

Eksempel 5.1 Et eksempel på en ligning er

$$5x - 9 = 2x \ .$$

Ligningen består af de to regnestykker $5x - 9$ og $2x$. Påstanden er, at disse to giver samme resultat.

$x = 3$ er en løsning til ligningen, idet de to sider af ligningen giver

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3 - 9 &= 6 \quad \text{(venstre side, } 5x-9\text{)}, \\ 2 \cdot 3 &= 6 \quad \text{(højre side, } 2x\text{)}, \end{aligned}$$

når man sætter 3 ind på x's plads. De to regnestykker giver altså samme resultat, når $x = 3$.

$x = 7$ er derimod ikke en løsning, fordi

$$\begin{aligned} 5 \cdot 7 - 9 &= 36 \ , \\ 2 \cdot 7 &= 14 \ . \end{aligned}$$

Her giver de to sider altså ikke samme resultat.

5.1 Ligningsløsning

At løse en ligning består i at finde frem til de tal, som er løsninger til ligningen.[2] Dette findes der forskellige teknikker til.

[2]Man kan sagtens have ligninger, som har mere end én løsning; ligesom man også kan have ligninger, som slet ikke har løsninger.

De to sider af ligningen er to regnestykker, som giver samme resultat, hvis man indsætter en løsning på den ubekendtes plads.

F.eks. er

$$2 \cdot 4 + 3 = 11 \qquad \text{og} \qquad 5 \cdot 4 - 9 = 11 \ ,$$

hvilket vil sige, at $x = 4$ er en løsning til ligningen[3]

$$2x + 3 = 5x - 9 \ . \tag{5.1}$$

[3]Begge sider giver 11, når man sætter 4 ind på x's plads.

Men ligningen

$$2x + 3 + 9 = 5x - 9 + 9$$

må have den samme løsning. Det er godt nok ikke de samme to regnestykker som før, så resultatet på hver side er ikke længere 11; men det er stadig det samme på begge sider, da det er det samme tal, der er blevet lagt til på begge sider. Når man sætter $x = 4$ får man

$$2 \cdot 4 + 3 + 9 = 20 \qquad \text{og} \qquad 5 \cdot 4 - 9 + 9 = 20 \ .$$

Hvis man lægger det samme tal til på begge sider af en ligning, får man altså en ny ligning; men det er én, der har den samme løsning som den gamle.

Generelt gælder der følgende sætning.

Sætning 5.2

Hvis man udfører den samme regneoperation på begge sider af en ligning, får man en ny ligning med samme løsning.

Ligningen (5.1) kan f.eks. løses ved at udføre følgende omformninger:

$$\begin{aligned}
2x + 3 &= 5x - 9 && \text{Ligning (5.1)} \\
2x + 3 + 9 &= 5x - 9 + 9 && \text{Der er lagt 9 til på begge sider.} \\
2x + 12 &= 5x && \text{Begge sider er reduceret} \\
2x + 12 - 2x &= 5x - 2x && \text{$2x$ er trukket fra på begge sider.} \\
12 &= 3x && \text{Begge sider er reduceret.} \\
\frac{12}{3} &= \frac{3x}{3} && \text{Der er delt med 3 på begge sider.} \\
4 &= x && \text{Begge sider er reduceret.}
\end{aligned}$$

Den sidste linje er i princippet også en ligning; men det er en ligning som det er nemt at finde løsningen til. Løsningen til ligningen $4 = x$ er nemlig $x = 4$ – og dette er så også løsningen til den oprindelige ligning.[4]

Man må udføre præcis den regneoperation, man har lyst til; man skal blot huske at gøre det samme på begge sider.[5]

Når man udfører en regneoperation på begge sider af en ligning, er det vigtigt at huske, at man skal udføre regneoperationen på *hele* siden, og ikke kun på en del af den. Et par eksempler følger:

Eksempel 5.3 Hvis ligningen $\frac{1}{2}x + 3 = 8$ skal ganges med 2 på begge sider, skal man huske at sætte en parentes:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}x + 3 &= 8 && \Longleftrightarrow^{6} \\
2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}x + 3\right) &= 2 \cdot 8 && \Longleftrightarrow \\
x + 6 &= 16 \ .
\end{aligned}$$

Regner man færdig, finder man løsningen $x = 10$.

[4]Hele pointen med omformningerne er altså at komme frem til en ligning, der giver løsningerne direkte.

[5]Man må dog ikke gange med 0, idet ligningen så reduceres til $0 = 0$, hvilket altid er rigtigt – og dermed er muligheden for at finde løsninger til den oprindelige ligning forsvundet.

[6]Tegnet $\Longleftrightarrow$ hedder en *biimplikationspil*. Den viser, at de to påstande, som står på hver side af pilen, betyder det samme; dvs. at det ene er sandt, hvis det andet er sand, og omvendt.

Eksempel 5.4 Vil man løse ligningen $x^2 + 4 = 13$ kunne man fristes til at forsøge at tage kvadratroden først. Herved får man

$$x^2 + 4 = 13 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{13}\ .$$

Her kan man ikke reducere venstre side, idet man skal lægge sammen, inden man tager kvadratroden — og det kan man ikke, fordi man jo ikke kender x.

I stedet er det god idé at trække 4 fra først, så man får:

$$x^2 + 4 = 13 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = 9\ .$$

Denne ligning kan nemmere løses. Den har de to løsninger $x = -3$ og $x = 3$.[7]

[7] Husk, at $(-3)^2 = 9$, idet produktet af to negative tal er positivt. Derfor er $x = -3$ også en løsning til ligningen.

At gøre prøve

Hvis man får en løsning til en ligning serveret, eller man har løst en ligning og gerne vil checke, om der nu også *er* tale om en løsning, kan man »gøre prøve«.

At gøre prøve består i al sin enkelhed i at indsætte den løsning, man vil efterprøve, på hver side af ligningen og se, om man får samme resultat.

Eksempel 5.5 Er $x = 2$ en løsning til $x^3 - 3 = 2 \cdot x + 1$?

Venstre side af ligningen giver

$$2^3 - 3 = 8 - 3 = 5\ .$$

Højre side giver

$$2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5\ .$$

Da de to sider giver samme resultat, når $x = 2$, er det en løsning til ligningen.

Eksempel 5.6 Er $x = 3$ en løsning til ligningen $\frac{4x}{x+1} = 5$?

Venstre side giver

$$\frac{4 \cdot 3}{3 + 1} = \frac{12}{4} = 3\ .$$

Da dette ikke er lig 5, som er højre side, er $x = 3$ ikke en løsning.

Hvad så med $x = -5$? Her giver venstre side

$$\frac{4 \cdot (-5)}{-5 + 1} = \frac{-20}{-4} = 5\ .$$

Dette er lig med højre side, så $x = 5$ er en løsning til ligningen.

5.2 Nulreglen

Hvis man ganger med 0 bliver resultatet altid 0. Men man kan omvendt ikke gange to tal, som begge er forskellige fra 0, med hinanden og få 0 som resultat.

Er resultatet af et gangestykke 0, må mindst et af tallene, der indgår i gangestykket, derfor være 0. Dette kan formuleres som en sætning.

Sætning 5.7: Nulreglen

Hvis et produkt giver 0, er mindst én af faktorerne 0:

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \ \vee \ b = 0 \ .$$

Hvis den ene side af en ligning er 0, og den anden er produktet af to størrelser, kan man bruge nulreglen til at løse ligningen.

Eksempel 5.8 Hvad er løsningerne til ligningen $(x-3)\cdot(x+2) = 0$?

På højre side står der 0, og på venstre side produktet af de to størrelser $x-3$ og $x+2$. Ifølge nulreglen er mindst én af disse to størrelser 0, dvs.

$$x - 3 = 0 \quad \text{eller} \quad x + 2 = 0 \ ,$$

hvilket giver de to løsninger

$$x = 3 \quad \text{eller} \quad x = -2 \ .$$

Eksempel 5.9 Ligningen $(x+2)(x-4)(x+1) = 0$ løses på følgende måde:[8]

$$\begin{aligned} (x+2)(x-4)(x+1) &= 0 && \Leftrightarrow \\ x+2 = 0 \quad \vee \quad x-4 = 0 \quad \vee \quad x+1 &= 0 && \Leftrightarrow \\ x = -2 \quad \vee \quad x = 4 \quad \vee \quad x &= -1 \ . \end{aligned}$$

Med lidt øvelse kan man hurtigt finde disse løsninger ud fra den oprindelige ligning.

[8]Tegnet $\vee$, som benyttes herunder, betyder »eller«.

Det er nogle gange muligt at bruge nulreglen, hvis man kan skrive den ene side af ligningen om til et produkt.

Eksempel 5.10 Ligningen $x^2 - 5x = 0$ kan løses på følgende måde:

Først sættes x uden for en parentes

$$x \cdot (x - 5) = 0 \ ,$$

og derefter bruger man nulreglen

$$x = 0 \quad \vee \quad x - 5 = 0 \ .$$

Ligningen har altså de to løsninger

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 5 \ .$$

5.3 To ligninger med to ubekendte

I de foregående to afsnit er der kun set på ligninger, der indeholder én ubekendt. Et eksempel på en ligning, der indeholder flere ubekendte, kunne være

$$3x - y = 4 \ .$$

Her er der to ubekendte, x og y. Hvis man har én ligning med to ubekendte, er der i princippet uendeligt mange par $(x; y)$ af løsninger til ligningen.

F.eks.

$$\begin{aligned} x = 5, y = 11 &: \quad 3 \cdot 5 - 11 = 4 \\ x = 1, y = -1 &: \quad 3 \cdot 1 - (-1) = 4\ . \end{aligned}$$

Hvis man har *to* ligninger med to ubekendte, er der derimod ét talpar som løser begge ligninger.[9]

[9] Der er enkelte undtagelser, disse er beskrevet nedenfor.

Eksempel 5.11 De to ligninger

$$5x - y = 3 \quad \text{og} \quad 2x + 4y = 10$$

har løsningen $x = 1$ og $y = 2$, fordi

$$5 \cdot 1 - 2 = 3 \quad \text{og} \quad 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 10\ .$$

Der findes ingen andre værdier af x og y, der løser begge ligninger.

To ligninger med to ubekendte kaldes også et *ligningssystem*. Ligningssystemet i eksemplet ovenfor havde én løsning. Man kan godt komme ud for ligningssystemer, som har flere løsninger.

Eksempel 5.12 De to ligninger

$$x + y = 2 \quad \text{og} \quad 3x + 3y = 6\ ,$$

har ikke én løsning.

Det skyldes, at man kan komme fra den første ligning til den anden ved at gange med 3 på begge sider. De to ligninger har derfor præcis de samme løsninger, og et par $(x; y)$, der opfylder første ligning, opfylder derfor også den anden.

I eksemplet sås et ligningssystem, som havde uendeligt mange løsninger. Man kan også have et ligningssystem, hvor der ingen løsninger er.

At løse to ligninger med to ubekendte består i at finde frem til de(t) talpar, der løser ligningssystemet. Her findes der to metoder.

Substitutionsmetoden

At løse to ligninger med to ubekendte vha. substitutionsmetoden består i det følgende: Man finder et udtryk for den ene ubekendte vha. den ene ligning, som man derpå indsætter i den anden ligning. Herved opstår der en ligning med kun én ubekendt.

Eksempel 5.13 For at løse dette ligningssystem

$$2x + y = 7 \quad \text{og} \quad 5x - 3y = 12$$

kan man isolere y i den første ligning. Det giver

$$2x + y = 7 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 7 - 2x\ . \tag{5.2}$$

Dette udtryk indsætter man i den anden ligning

$$5x - 3y = 12 \quad \Longrightarrow \quad 5x - 3\big(7 - 2x\big) = 12 \;.$$

Den ligning kan man nu løse:

$$\begin{aligned} 5x - 3(7-2x) &= 12 \\ 5x - 21 + 6x &= 12 \\ 11x - 21 &= 12 \\ 11x &= 12 + 21 \\ 11x &= 33 \\ x &= 3 \;. \end{aligned}$$

Fra (5.2) har man, at $y = 7 - 2x$, dvs.

$$y = 7 - 2 \cdot 3 = 1 \;.$$

Løsningen til ligningssystemet er altså $x = 3$ og $y = 1$.

Eksempel 5.14 Ligningssystemet[10]

$$x + y = 5 \quad \wedge \quad y^2 = 9 \;,$$

kan løses ved først at løse den sidste ligning:

$$y^2 = 9 \quad \Longleftrightarrow \quad y = -3 \vee y = 3 \;.$$

Til hver af disse værdier af y hører en værdi af x.

Den første ligning i ligningssystemet kan omskrives til $x = 5 - y$, hvilket giver disse to x-værdier:

$$\begin{aligned} y &= -3 \quad \Longrightarrow \quad x = 5 - (-3) = 8 \\ y &= 3 \quad\;\; \Longrightarrow \quad x = 5 - 3 = 2 \;. \end{aligned}$$

Ligningssystemet har altså løsningerne

$$\big(x = 2 \;\wedge\; y = 3\big) \quad \vee \quad \big(x = 8 \;\wedge\; y = -3\big) \;.$$

[10]Tegnet $\wedge$, som bruges nedenfor, betyder »og«. Dette skal forstås som »både og«, dvs. de to ligninger på hver side af $\wedge$ skal gælde på samme tid.

Lige store koefficienters metode

En anden metode til at løse to ligninger med to ubekendte er »lige store koefficienters metode«. Denne metode virker kun, hvis de to ligninger kan skrives på formen

$$ax + by = c \;,$$

hvor a, b og c er tre tal.[11]

[11]Tallene a og b kaldes *koefficienter* til x og y – deraf navnet på metoden.

Ideen i metoden er at omskrive ligningssystemet, sådan at enten x eller y har samme koefficient i de to ligninger. Herefter kan man trække ligningerne fra hinanden og få en ny ligning, hvori kun den ene ubekendte optræder.

Metoden illustreres bedst med et eksempel.

Eksempel 5.15 Her ses på ligningssystemet

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -2x + 5y = 21 \end{cases} .$$

For at finde en løsning ganger man først den øverste ligning med 5 på begge sider. Så får man

$$\begin{cases} 15x + 5y = 55 \\ -2x + 5y = 21 \end{cases} .$$

Trækker man disse to ligninger fra hinanden[12] fås den nye ligning

$$(15x + 5y) - (-2x + 5y) = 55 - 21 ,$$

som kan reduceres til

$$17x = 34 .$$

Løsningen til denne ligning er $x = 2$.

Når man kender x, kan dette indsættes i én af ligningerne fra det oprindelige ligningssystem, her vælges $3x + y = 11$:

$$3 \cdot 2 + y = 11 \quad \Leftrightarrow \quad y = 5 .$$

Løsningen til ligningssystemet er derfor $x = 2$ og $y = 5$.

[12] Grunden til, at man må trække to ligninger fra hinanden, er, at højre og venstre side af en ligning er samme tal. Man trækker derfor det samme tal fra på begge sider.

I ovenstående eksempel var det nok at omskrive den ene ligning. Nogle gange er det nødvendigt at omskrive begge.

Eksempel 5.16 Ligningssystemet

$$\begin{cases} 5x - 4y = 22 \\ -2x + 8y = 4 \end{cases}$$

omskrives ved at forlænge den øverste ligning med 2 og den nederste med 5:[13]

$$\begin{cases} 10x - 8y = 44 \\ -10x + 40y = 20 \end{cases} .$$

Her har koefficienterne til x forskelligt fortegn, så derfor lægger man ligningerne sammen i stedet for at trække fra:

$$(10x - 8y) + (-10x + 40y) = 44 + 20 .$$

Ligningen reduceres og løses:

$$32y = 64 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2 .$$

Dette indsættes i den første af de oprindelige ligninger, $5x - 4y = 22$:

$$5x - 4 \cdot 2 = 22 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 30 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 .$$

Løsningen til ligningssystemet er altså $x = 6$ og $y = 2$.

[13] Bemærk, at man forlænger hver ligning med koefficienten til x fra den anden ligning.

5.4 Øvelser

Øvelse 5.1
Løs ligningerne

a) $7x - 3 = 9 + x.$ b) $4 \cdot (2x - 3) = 12.$

c) $4x - 3 = 8x - 19.$ d) $-x + 12 = \frac{x}{3}.$

e) $\frac{x-1}{4} = x + 5.$ f) $2(3x + 4) = 4x - 2.$

Øvelse 5.2
Løs ligningerne

a) $(3x + 18) - 7 = (5x + 1) - 4$

b) $6x - (x + 5) = 3x + (x - 8)$

c) $3(t - 4) = 2t + 6$

d) $8(x - 8) = 2x + 8$

e) $3 + (2s - 5) = 6$

f) $3(q + 3) = 2(4 + q)$

g) $5 - (8x - 7) + 18x = 31x - (90 + 28x) - 45$

Øvelse 5.3
Løs ligningerne

a) $\frac{20}{x} = 5$ b) $\frac{10}{x} + 3 = 8$

c) $\frac{8}{x} - 7 = 17$ d) $\frac{20}{x} = 5$

e) $\frac{9}{x-1} = 3$ f) $\frac{16}{x+5} - 3 = 1$

Øvelse 5.4
Løs ligningerne

a) $\frac{x}{3} + 4 = 7$ b) $7 - \frac{y}{2} = 8$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$ d) $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 14$

e) $\frac{2y}{3} - \frac{y}{4} = 15$ f) $\frac{3y}{5} - \frac{y}{10} = 15$

Øvelse 5.5
Isoler q i formlen $a = 3q - qa + 5$. For hvilken værdi af a, kan det ikke lade sig gøre?

Øvelse 5.6
Løs ligningerne

a) $x^3 = 27$ b) $x^2 = 64$

c) $x^5 = 1{,}61051$ d) $x^7 = -1$

e) $x^4 = 67$ f) $x^3 = -13$

Øvelse 5.7
Løs ligningerne

a) $x^5 - 3 = 29$ b) $x^2 + 4 = 20$

c) $5x^3 = 320$ d) $0{,}1x^4 = 240{,}1$

e) $2x^3 - 5 = 11$ f) $6x^2 + 4 = 76$

Øvelse 5.8
Løs følgende ligninger:

a) $x(x + 2) = 0$

b) $(x + 3)(x - 1) = 0$

c) $2(x + 7)x = 0$

d) $(2x - 4)(3x + 12) = 0$

e) $(x + 6)(x - 1)(3x + 6)x = 0$

f) $x^2 - 6x = 0$

Øvelse 5.9
Løs hvert af følgende ligningssystemer:

a) $\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + y &= 10 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x + 5y &= 5 \\ y &= 2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ 2x - 4y &= -2 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ -3x + 2y &= -1 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ 2x - 4y &= -2 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} 2a + 4b &= -2 \\ 7a - 3b &= 44 \end{aligned}$

Øvelse 5.10
Hvilket tal giver det samme resultat ved at lægges til 7, som ved at ganges med 7?

Bibliografi

[1] Florian Cajori. *A History of Mathematical Notation*. Bd. I: Notations in Elementary Mathematics. La Salle, Illinois: Open Court Publishing Company, 1974.

[2] Leo Rogers. *The History of Negative Numbers*. University of Cambridge. URL: http://nrich.maths.org/5961 (senest bes. 24.06.2014).