

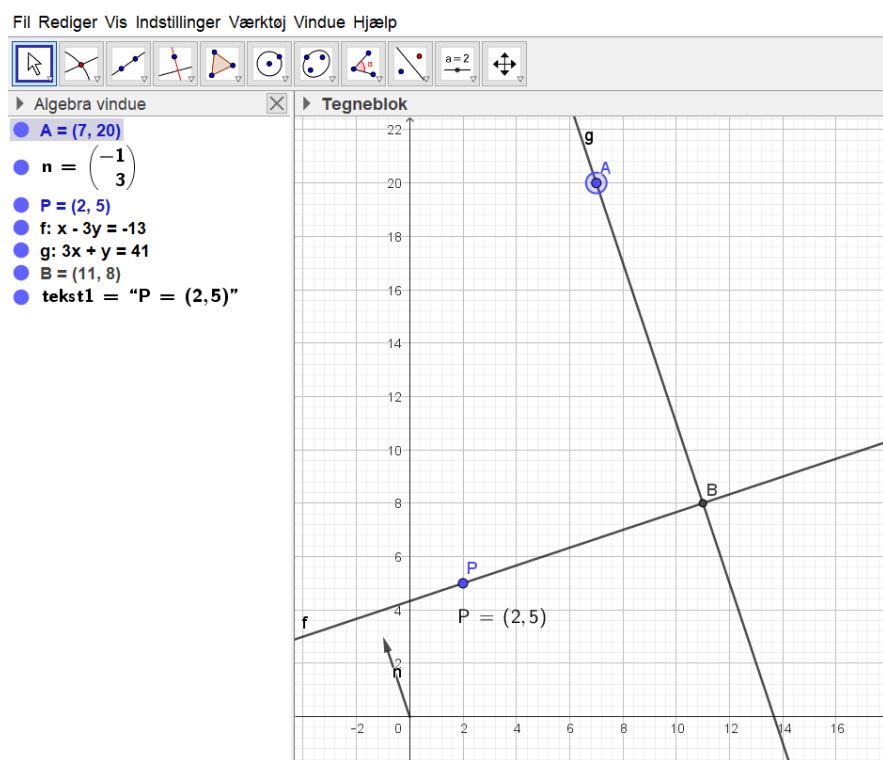
Opgave 3.D2.3

”Projektionen af punktet” betyder at man skal finde det punkt, hvor den linje m der er vinkelret på l og går gennem punktet $A(7,20)$, skærer l .

En linje l går gennem punktet $P(2,5) = (x_0, y_0)$ og har $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ som normalvektor.

- a) **Bestem projektionen af punktet $A(7,20)$ på linjen l :** Her er vist en geometrisk løsning i Geogebra:

Først tages punktet $A(7,20)$ ind. Dernæst tegnes normalvektoren. Så tages punktet $P(2,5)$ ind. I menuen vælges **Vinkelret linje** og der klikkes på vektoren og punktet P og linjen f fremkommer. Dernæst vælges igen **Vinkelret linje** og der klikkes på punktet A og linjen f , hvorved linjen g fremkommer. Til sidst bruges skæringsværktøjet mellem de 2 linjer og man klikker på hver linje og punktet $B(11,8)$ vises. (Husk at få hele skærbilledet sat ind inkl. Algebravinduet).



Alternativ løsning: Beregning

- a) **Bestem projektionen af punktet $A(7,20)$ på linjen l :**

Vi skal dele opgaven op i delopgaver.

1. **delopgave:** Vi kan finde ligningen for linjen l på normalform, da vi kender et punkt og normalvektoren- vi bruger formel (71):

$$(71) \quad a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0 \quad \text{og} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Vi sætter oplysningerne ind i ligningen:

$$-1 \cdot (x - 2) + 3 \cdot (y - 5) = 0$$

Projektionen for punktet $A(7,20)$ på linjen l er så skæringspunktet mellem l og m , der står vinkelret på l og går gennem A . Normalvektoren står vinkelret på l , så $\vec{n}$ er retningsvektoren for m .

2. delopgave: Vi finder linjens ligning for m på normalform:

Vi finder tværvektoren til $\vec{n}$ der er normalvektor for m :

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Så bestemmer vi en ligning for linjen m . Vi sætter igen ind i formel (71) og kender punktet $A(7,20)$.

$$-3 \cdot (x - 7) - 1 \cdot (y - 20) = 0$$

Nu kan vi bestemme koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m . Vi løser 2 ligninger med 2 ubekendte i et CAS-værktøj (her wordmat):

$$-1 \cdot (x - 2) + 3 \cdot (y - 5) = 0$$

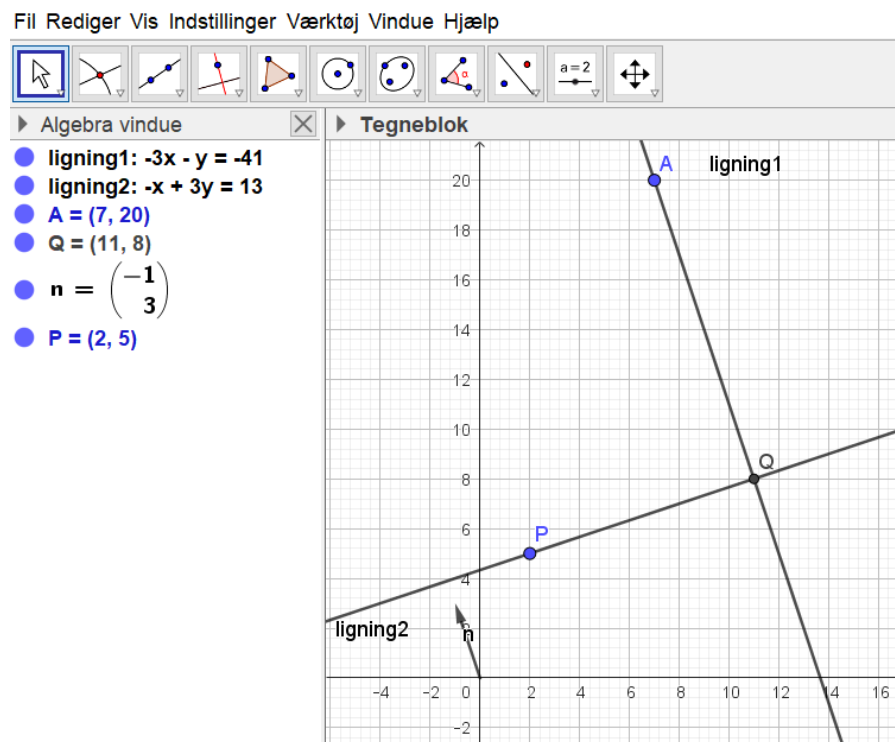
$$-3 \cdot (x - 7) - 1 \cdot (y - 20) = 0$$

⇕ Ligningssystemet løses for x, y vha. CAS-værktøjet WordMat's 'Løs Ligninger' funktion,

$$x = 11 \quad \wedge \quad y = 8$$

Projektionen af punktet $A(7,20)$ på linjen l er skæringspunktet mellem linjen l og m , dermed er projektionen lig med $B(11,8)$.

Geometrisk løsning: Vi kan kontrollere med GeoGebra og indtegne linjerne m og l . Her er linjerne tegnet ind som anført på formen ovenfor, men man kunne reducere dem og få dem på normalform (men det behøver man ikke).



For at øve os reducerer vi de 2 ligninger:

Vi reducerer og finder ligningen på normalform)

$$-1 \cdot (x - 2) + 3 \cdot (y - 5) = 0 \Leftrightarrow -x + 2 + 3y - 15 = 0 \Leftrightarrow -x + 3y - 13 = 0$$

dvs. ligningen for linjen er givet ved: **$l: -x + 3y - 13 = 0$** .

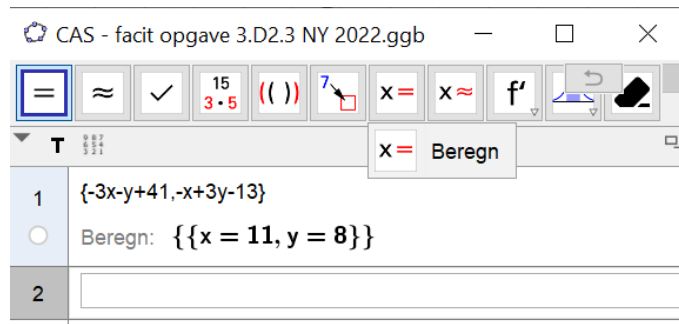
Og tilsvarende ligningen for m :

$$-3 \cdot (x - 7) - 1 \cdot (y - 20) = 0 \Leftrightarrow -3x + 21 - y + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

dvs. ligningen for linjen er givet ved: **$m: -3x - y + 41 = 0$**

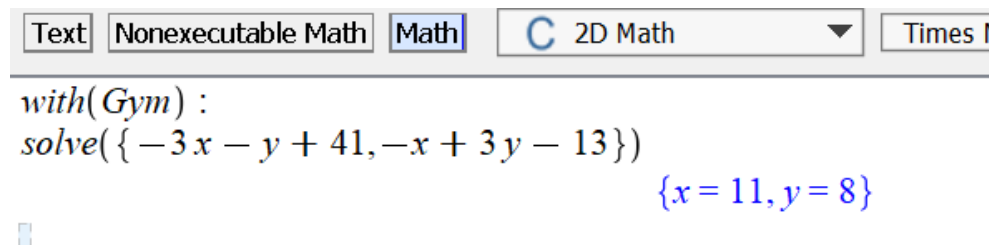
Vi kan se at disse ligninger passer med GeoGebra. GeoGebra skriver ligningerne om, når vi taster ind.

CAS med GeoGebra: Vi kunne også løse ligninger med GeoGebra's CAS-værktøj:



Man kan også løse de 2 ligninger med 2 ubekendte i Maple (dem der foretrækker

det): Man bruger samme metode som i GeoGebra med "tuborgparenteser" - man skriver bare *solve*:



Opgave 3.D2.4

Givet to vektorer i et koordinatsystem

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2t+5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Beregning af to værdier af t , hvor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale:

Hvis 2 vektorer er ortogonale skal det gælde at skalarproduktet af vektorerne er 0:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$\begin{pmatrix} t-1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t+5 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Ligningen løses numerisk for t vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$t \approx -3,212214 \quad \vee \quad t \approx 1,712214$$

Dvs. svaret er: $t \approx -3,21 \vee t \approx 1,71$

Man kan også først beregne prikproduktet:

$$\begin{pmatrix} t-1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t+5 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot t^2 + 3 \cdot t - 11$$

Her er det løst ved Alt+b også bagefter løse ligningen:

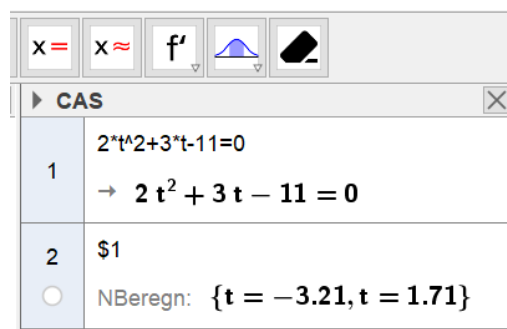
$$2 \cdot t^2 + 3 \cdot t - 11 = 0$$



Ligningen løses for t vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$t = -3,212214 \vee t = 1,712214$$

Vi får naturligvis det samme. Man kan løse 2. gradsligning i Geogebra og man får det samme:



Man kan løse 2. grads ligning i Maple: Her skal man huske at "afrunde" til fx 2 decimaler.

$$\text{solve}(2 \cdot t^2 + 3 \cdot t - 11 = 0)$$

$$-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{97}}{4}, -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{97}}{4}$$

$\xrightarrow{\text{afrund}}$

$$1.71, -3.21$$

Opgave 3.D1.44

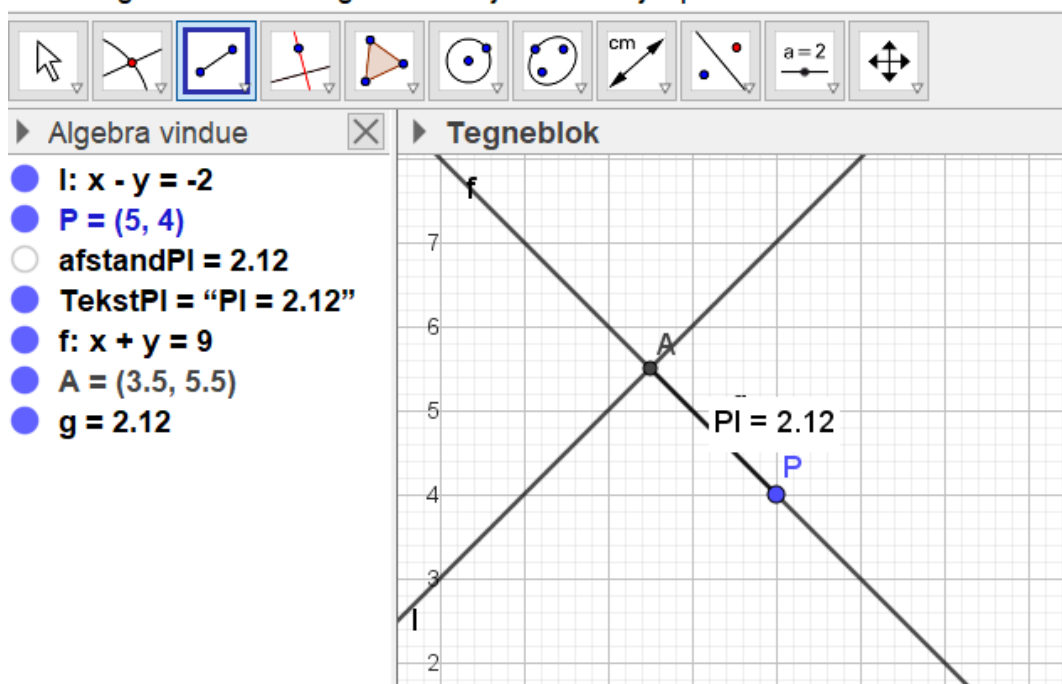
I et koordinatsystem er der givet et punkt $P(5,4)$ og en linje $l: x - y + 2 = 0$.

a) Bestem afstanden fra punktet P til linjen l .

Geometrisk løsning vha. GeoGebra:

Linjens ligning skrives ind og punktet P ligeså. Så vælges afstandsværktøjet og Geogebra beregner **2,12**. Man kan også tegne den vinkelrette linje gennem P og finde skæringspunktet med linjen l vha. skæringsværktøjet og bagefter markere linjestykket mellem P og A og få det til: $g = 2,12$.

Fil Rediger Vis Indstillinger Værktøj Vindue Hjælp



Endelig kan man også beregne afstanden med distanceformlen (74) og få det samme: Vi aflæser fra ligningen at $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ og vi kender $P(5,4) = (x_1, y_1)$ og $c = 2$:

På **normalform**:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (74)$$

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|1 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \approx 2,1213 = \mathbf{2,12}$$

En anden ligning m er givet ved parameterfremstillingen

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

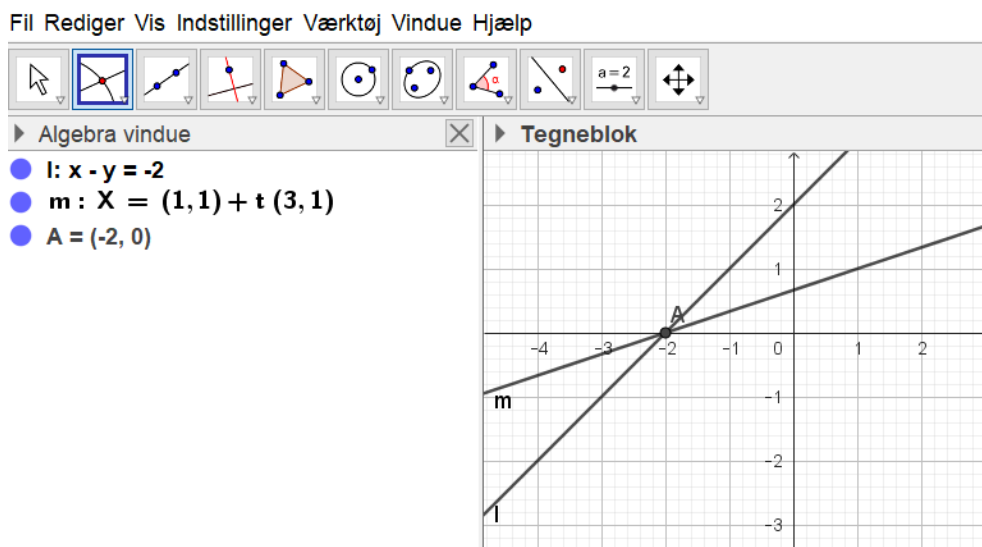
b) Bestem skæringspunktet mellem linjerne m og l :

Den nemmeste metode er at tegne begge linjer ind i GeoGebra og bruge skæringsværktøjet.

Input til Geogebra (bemærk hvordan parametrisk form skrives ind)

Input: $l: x - y + 2 = 0$

Input: $m: (1,1) + t \cdot (3,1)$



Vi ser at skæringspunktet mellem linjerne er $A(-2, 0)$.

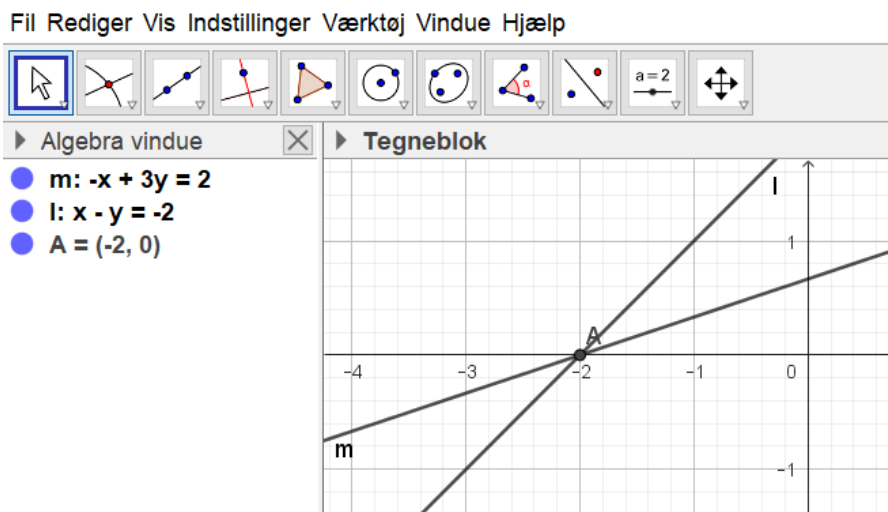
Man kan også vise mere fagligt overblik ved: Parameterfremstillingen for linjen m omskrives til ligning på *normalform*: Vi aflæser retningsvektoren fra parameterfremstillingen og kan så beregne normalvektoren som "hat" vektor: $\hat{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\hat{r} = \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(71) \quad a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0 \quad \text{og} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$-1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 1) = 0$$

Geometrisk løsning vha. Geogebra: Begge ligninger tages ind i GeoGebra og man bruger skæringsværktøjet:



Man kan også opstille 2 ligninger med 2 ubekendte altså finde skæringen mellem de 2 linjer ved beregning og CAS-værktøj fx:

$$-1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 1) = 0$$

$$x - y + 2 = 0$$



Ligningssystemet løses for x, y vha. WordMat's 'Løs Ligninger' funktion,

$$x = -2 \quad \wedge \quad y = 0.$$

Vi får igen punktet $A(-2, 0)$. Endelig kan man bruge CAS i GeoGebra og Maple:

	Man vælger CAS. "Tuborgparenteser" er på tastatur eller man bruger: "Vis tastatur" i dropdown-menuen også kan man vælge "tuborgparenteserne".
--	--

Maple:

$$\text{solve}(\{x - y + 2 = 0, -(x - 1) + 3(y - 1) = 0\})$$

$$\{x = -2, y = 0\}$$

Opgave 3.D2.15

Vi ved at cirklen har centrum i $C(1, -1)$ og radius 5.

a) Redegørelse for at nedenstående ligning er en ligning for cirklen

For at vise det skal vi bruge kvadratsætningerne og omskrive vores ligning til cirkelns ligning:

(Det er en god ide, at du går ind på den lille video vi oprindeligt så da vi lærte denne type

beregning: <https://www.youtube.com/embed/aTh613vg8a8?autoplay=1>

Beregning	Forklaring
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 = r^2$ $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$	Cirkelns ligning - skrives op og man kan omskrive til den anførte form. Vi skal bruge kvadratsætninger "baglæns", men vi kender jo a og b. Vi ser at: $2ax = 2x \Rightarrow a = 1$ og $-2by = 2y \Rightarrow b = -1$
$x^2 - 2x + y^2 + 2y - 23 = 0$	Ligningen skrives op - så lægges a^2 og b^2 til og trækkes fra:
$x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + y^2 + 2y + 1^2 - 1^2 - 23 = 0$	Så omskrives til kvadratsætning
$(x - 1)^2 - 1 + (y + 1)^2 - 1 - 23 = 0$	Så reduceres
$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 - 25 = 0$	Så fås ligningen på form af cirkelns ligning.

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$$

Vi aflæser at $C(a, b) = C(1, -1)$ og at radius er:
 $r = 5$ som passer med det opgivne.

Linjen l er bestemt ved ligningen: $l: x - 7y + 17 = 0 \Leftrightarrow x = 7y - 17$

b) Beregning af skæringspunkterne mellem cirklen og linjen l :

For at løse denne opgave kan vi isolere x i linjens ligning og sætte værdien ind i cirkelns ligning:

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 + (y + 1)^2 &= 5^2 \\ ((7y - 17) - 1)^2 + (y + 1)^2 &= 5^2 \\ (7y - 18)^2 + (y + 1)^2 &= 5^2\end{aligned}$$

Ligningen løses numerisk for y vha. CAS-værktøjet WordMat.

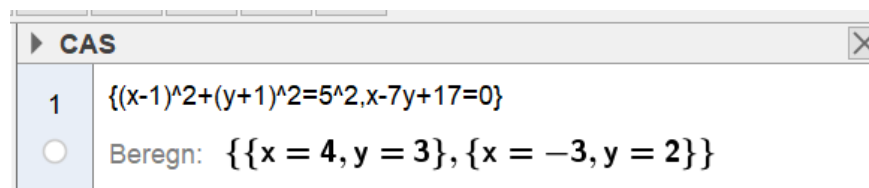
$$y \approx 2 \quad \vee \quad y \approx 3$$

Vi kan nu beregne de tilsvarende x -værdier:

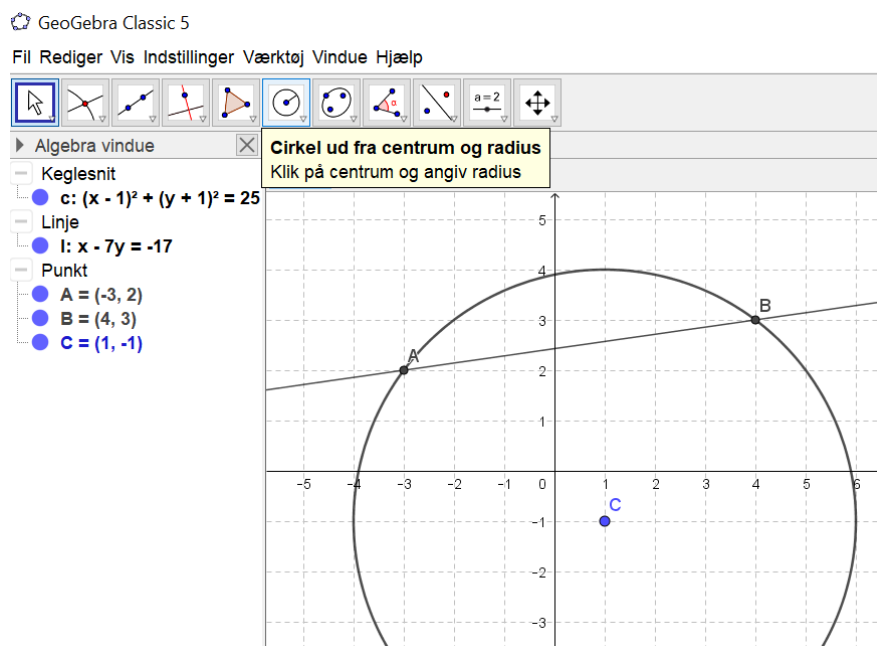
$$y = 2: x = 7 \cdot 2 - 17 = -3$$

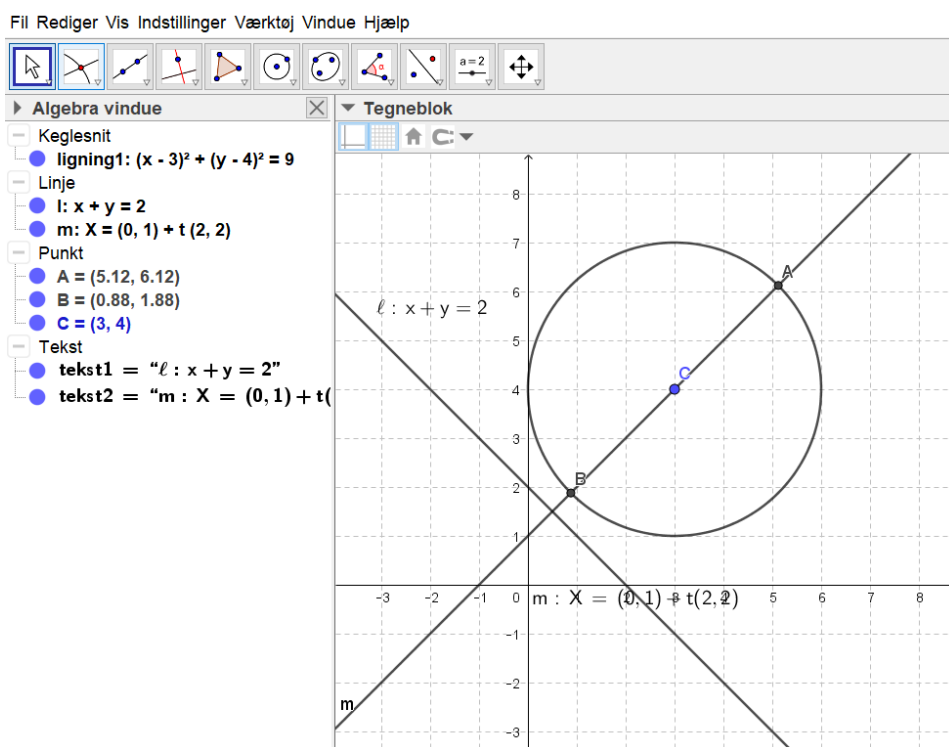
$$y = 3: x = 7 \cdot 3 - 17 = 4$$

Linjen skærer altså cirklen i $(-3, 2)$ og $(4, 3)$. Vi kan lave den i Geogebra CAS også:



Vi kan tjekke vores løsning grafisk i Geogebra (men bemærk - vi skulle beregne koordinatsættene!). Her klikker vi på "cirkel-ikonet" og vælger "Cirkel ud fra centrum og radius". Vi kunne også have tastet cirkelns ligning ind i in-putfeltet og bag efter linjens ligning. Så vælger vi skæringsværktøjet og får skæringspunkterne.





- c) Bestemmelse af afstanden fra l til punktet på cirklen C , der ligger tættest på l . (IKKE med I jeres opgavesæt) ved beregning:

Vi bruger distanceformlen og finder afstanden fra centrum $C(3, 4) = (x_1, y_1)$ til linjen l :

$dist(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ og vi kender $l: 2x + 2y - 4 = 0$. her aflæser vi a , b og c :

$$dist(P, l) = \frac{|2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} \approx 3,535534$$

Vi ved at $r = 3$ så afstanden må være forskellen: $d = dist(P, l) - r = 3,535534 - 3 \approx 0,54$