



Hvad mon der er galt?

En sten kan ikke flyve.  
Morfille kan ikke flyve.  
Ergo er morfille en sten.

Alle hunde er dyr.  
Alle katter dyr.  
Ergo er alle hunde katte.

Et eksempel på en implikation er:

$$x \text{ er et ikke-negativt reelt tal} \Rightarrow (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) = x - 1$$

Præmissen er, at  $x$  er et ikke-negativt tal (ellers eksisterer kvadratroden ikke). Slutningsreglerne er en definition på, hvad man forstår ved kvadratroden, (så man kan slutte, at  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ ) og kvadratsætning 2.

Blandt slutningsreglerne er ofte en præcis definition af de begreber, der indgår. Man kan ikke bevise noget om en størrelse, man ikke ved, hvad er. Desuden indgår tidligere beviste sætninger og regneregler.

Ofte består et bevis som nævnt af en kæde af logiske slutninger (deduktioner), som fx:

$$\frac{x^2}{2} + 3 = 11 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 8 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \vee x = -4$$

Denne kæde af implikationer fortæller os, at hvis ligningen

$$\frac{x^2}{2} + 3 = 11$$

er opfyldt, må  $x$  være et af tallene 4 eller -4.

Hermed har vi imidlertid ikke bevist, at de to tal er løsninger til ligningen. Det kræver, at implikationerne vender den modsatte vej:

$$x = 4 \vee x = -4 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 8 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + 3 = 11$$

Her står, at hvis  $x$  er et af tallene 4 eller -4, er ligningen opfyldt, dvs. de to tal er løsninger til den.

I et tilfælde som ovenstående, hvor implikationer gælder begge veje, bruger man ofte tegnet  $\Leftrightarrow$ , der læses „medfører og medføres af“.

Som et eksempel på, at implikationen ikke altid gælder begge veje, ser vi på ligningen:

Muligheder

Vandvognen har kørt	Gaden er våd
Vandvognen har ikke kørt	Gaden er våd
Vandvognen har kørt	Gaden er ikke våd
Vandvognen har ikke kørt	Gaden er ikke våd

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
s	s	s
f	s	s
s	f	f
f	f	s

Sandhedstabel for implikation

$$\sqrt{x-2} = 4-x$$

Ved at kvadrere på begge sider og benytte regneregler for andengrads-ligninger, kan vi slutte:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} = 4-x &\Rightarrow x-2 = (4-x)^2 \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \\ &\Rightarrow x = 6 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Her står, at hvis ligningen er opfyldt, må  $x$  være et af tallene 6 eller 3. Om den modsatte implikationskæde gælder, undersøger man ofte ved at „gøre prøve“. I dette tilfælde kan man ikke slutte baglæns. Det er kun  $x = 3$ , der er løsning til ligningen.

Øvelse 1.1: Implikation

Hvilket led i implikationskæden ovenfor er det, man ikke kan bruge baglæns? Hvordan kan man se, at  $x = 6$  ikke er løsning til ligningen?

2. INDIREKTE BEVIS

I et indirekte bevis begynder man med at antage det modsatte (*negationen*) af det, man vil bevise. Hvis denne antagelse fører til en logisk modstrid, må den være falsk, og det, man gerne vil bevise, må derfor være sandt.

Som eksempel beviser vi, at der er uendeligt mange primtal. Et primtal er et tal, som kun tallet 1 og tallet selv går op i. De første primtal er 1, 2 og 3.

Hvis der kun er endeligt mange primtal, vil der være et, der er det største. Vi kan kalde det  $n$ . Vi ganger nu alle primtal med hinanden og får:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Alle primtal går naturligvis op i dette tal, man hvad nu hvis vi lægger 1 til:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 1$$

Da alle primtal går op i det første led, er der ingen af dem, der går op i hele tallet, og derfor må det selv være et primtal. Det er i modstrid med at, at  $n$  er det største primtal, og antagelsen, der førte frem til dette, må derfor være falsk. Der er uendeligt mange primtal.

**3. INDUKTIONSBÆVIS**

Nogle matematikere betragter induktionsbeviser som mindre troværdigt end andre beviser. Induktionsbeviser går ofte ud på at vise, at en formel, der indeholder en variabel  $n$ , er sand for alle positive hele tal  $n$ .

Man beviser, at formlen er sand for  $n = 1$ , at den er sand for  $n = 2$ , for  $n = 3$  osv., men på et eller andet tidspunkt bliver man træt og siger, „og sådan kan vi blive ved i det uendelige“. Det vil normalt være rigtigt, men kan man nu også være helt sikker på, at formlen gælder for  $n = 3271$ ?

Matematisk korrekte induktionsbeviser har en bestemt struktur, som vi nu skal se.

Sætningen om differentiation af en potens:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

bevises ofte ved induktion. Først beviser man den såkaldte *induktionsantagelse*: „Hvis sætningen er sand for eksponenten  $n$ , er den også sand for eksponenten  $n + 1$ “.

For at bevise induktionsantagelsen, skal man ud fra:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

bevise, at:

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = (n+1) \cdot x^n$$

Det gøres ved hjælp af produktreglen:

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = \frac{d}{dx}(x \cdot x^n) = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = (1+n)x^n \quad \text{q.e.d.}$$

For at komme videre skal vi have noget at „starte fra“, dvs. viden om, at sætningen er sand for en eller anden værdi af  $n$ . Vi ved imidlertid fra tidligere, at sætningen er sand for  $n = 2$  (for funktionen  $x^2$ ). Herefter følger af induktionsantagelsen, at sætningen er sand for den værdi, der er 1 større, dvs. for  $n = 3$ . Men så er den også sand for  $n = 4$ ,  $n = 5$  osv. Sætningen må være sand for alle  $n \geq 2$ .

**Eksempel 3.1: Sten**

En mand samler sten på sin mark og lægger dem på en vogn for at køre dem væk.

Hver gang han lægger en sten mere på vognen, tænker han: „Kan vognen bære alle de sten, kan den også bære én mere“. Derefter fortsætter han med at lægge sten på vognen. Til sidst braser vognen naturligvis sammen.

Manden går ud fra induktionsantagelsen: „Hvis vognen kan bære  $n$  sten, kan den også bære  $n+1$  sten“.

Herefter slutter han:

Hvis vognen kan bære den første sten, kan den også bære 2 sten.

Hvis vognen kan bære 2 sten, kan den også bære 3 sten. Osv. Vognen kan bære et hvilket som helst antal sten.

Hvor er fejlen i mandens ræsonnement?

**Øvelse 3.2: Sumformel**

I integralregningsafsnittet anvendte vi i eksempel 4.3 formlen:

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Bevis ved induktion, at formlen gælder for alle positive hele tal  $n$ .

**4. REKURSIONSBÆVIS**

I sandsynlighedsregningen optræder den såkaldte *kombinationsformel*:

$$K(n,r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Formlen udtrykker, at man fra en mængde  $M$  med  $n$  elementer kan udtage  $K(n,r)$  delmængder eller *kombinationer* med  $r$  forskellige elementer. Vi vil bevise denne formel ved et såkaldt *rekursionsbevis*.

**Bevis:**

Vi tænker os, at elementerne i  $n$ -mængden  $M$  hedder  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ . En  $r$ -kombination er så en mængde af typen  $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  med  $r$  forskellige elementer fra  $M$ . Herefter betragter vi følgende mængder:

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{mængden af kombinationer, der indeholder } a_1 \\ A_2 &= \text{mængden af kombinationer, der indeholder } a_2 \\ &\dots \\ A_n &= \text{mængden af kombinationer, der indeholder } a_n \end{aligned}$$

$A_1$  indeholder  $K(n-1, r-1)$  elementer, fordi den ud over  $a_1$  skal indeholde  $r-1$  elementer, der skal udtages fra en  $n-1$ -mængde.

$A_2$  indeholder også  $K(n-1, r-1)$  elementer. Her er det blot  $a_2$ , der er