2. Hvad er en vektor?

Vi vil nu indføre en ny type objekter, de såkaldte vektorer. En *vektor* betegnes ofte med et lille bogstav med en pil over, for eksempel $\vec{v}$. En vektor i planen har to koordinater, og de skrives normalt over hinanden, sådan:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

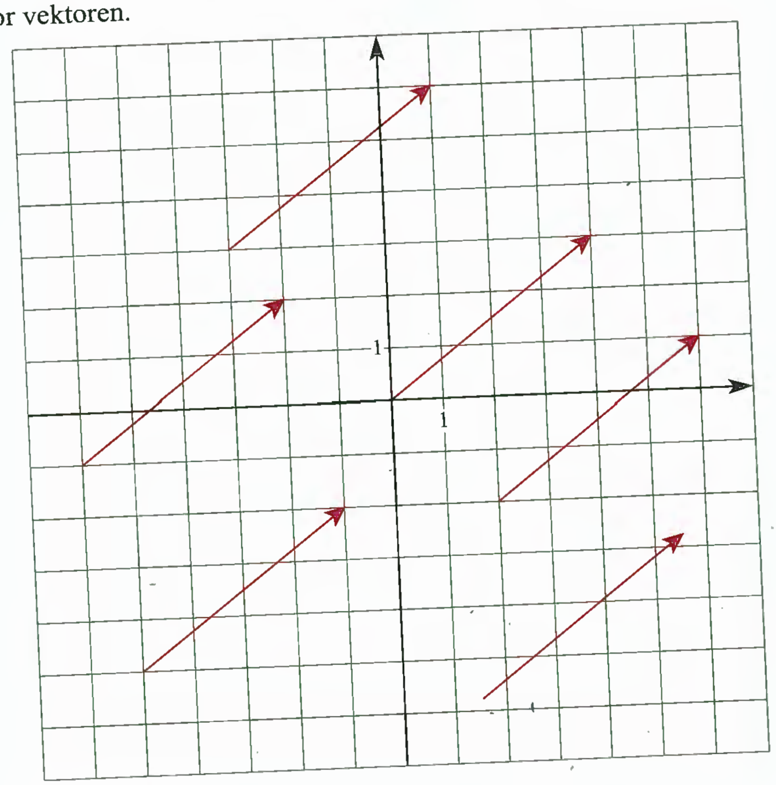
(Det kan læses "vektor v har koordinatsæt 4 komma 3").

Vektoren $\vec{o}$ der har koordinatsæt $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, kaldes *nulvektoren*, enhver anden vektor kaldes en *egentlig vektor*.

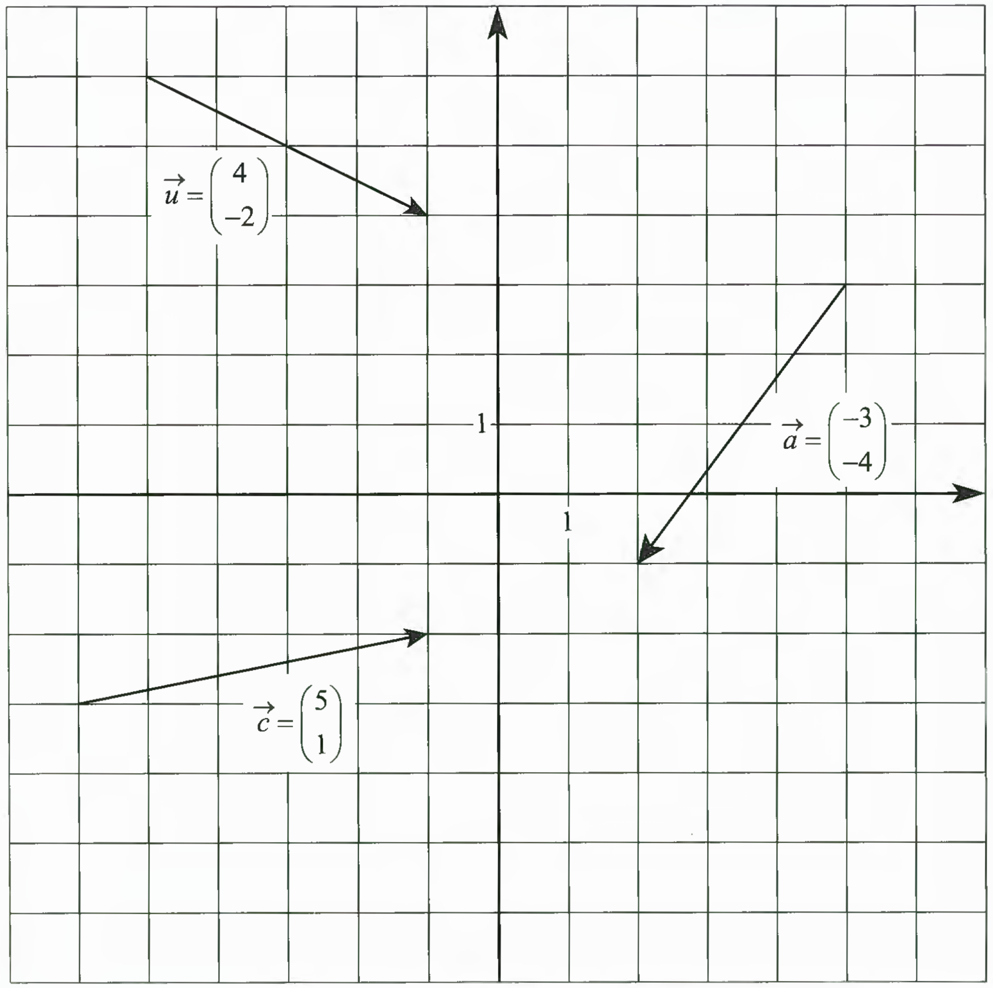
Hvis vi har en vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, kan vi *tegne det der kaldes en repræsentant for vektoren,* det vil sige en pil fra et vilkårligt punkt (x,y) i planen til punktet $(x+a,y+b)$. Da kaldes (x,y) repræsentantens startpunkt, og $(x+a,y+b)$ kaldes repræsentantens slutpunkt.

Når vi tegner en repræsentant for en vektor, siger vi at vi *afsætter vektoren*. Bemærk at der er uendelig mange forskellige repræsentanter for en bestemt vektor.

Udtrykket at en figur *viser en vektor*, betyder at der er tegnet en pil der er en repræsentant for vektoren.



Figuren viser forskellige repræsentanter for den samme vektor, $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

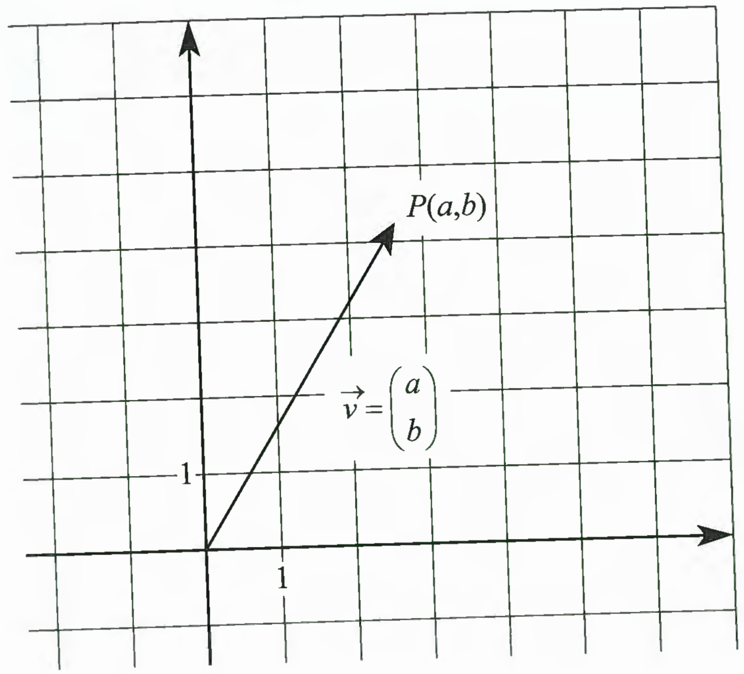


Figuren viser en repræsentant for vektoren $\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$. Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ er afsat, og figuren viser desuden vektoren $\vec{c}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

2.1 Tegn i et koordinatsystem 5 forskellige repræsentanter for vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

2.2 Afsæt vektorerne $\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$ i et koordinatsystem.

2.3 Afsæt vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$ i et koordinatsystem.



Den repræsentant for en vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ der begynder i (0,0), ender i punktet med koordinatsæt (a,b). Man siger at vektor $\vec{v}$ er *stedvektor* for punktet (a,b). På denne måde knyttes vektorer og punkter sammen. Ethvert punkt (x,y) knyttes sammen med den tilsvarende vektor $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Længden af en vektor defineres på følgende måde:

2.4 Betragt en vilkårlig vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$. Længden af vektoren betegnes $|\vec{a}|$.

Længden defineres ved $|\vec{a}|=\left|\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}$.

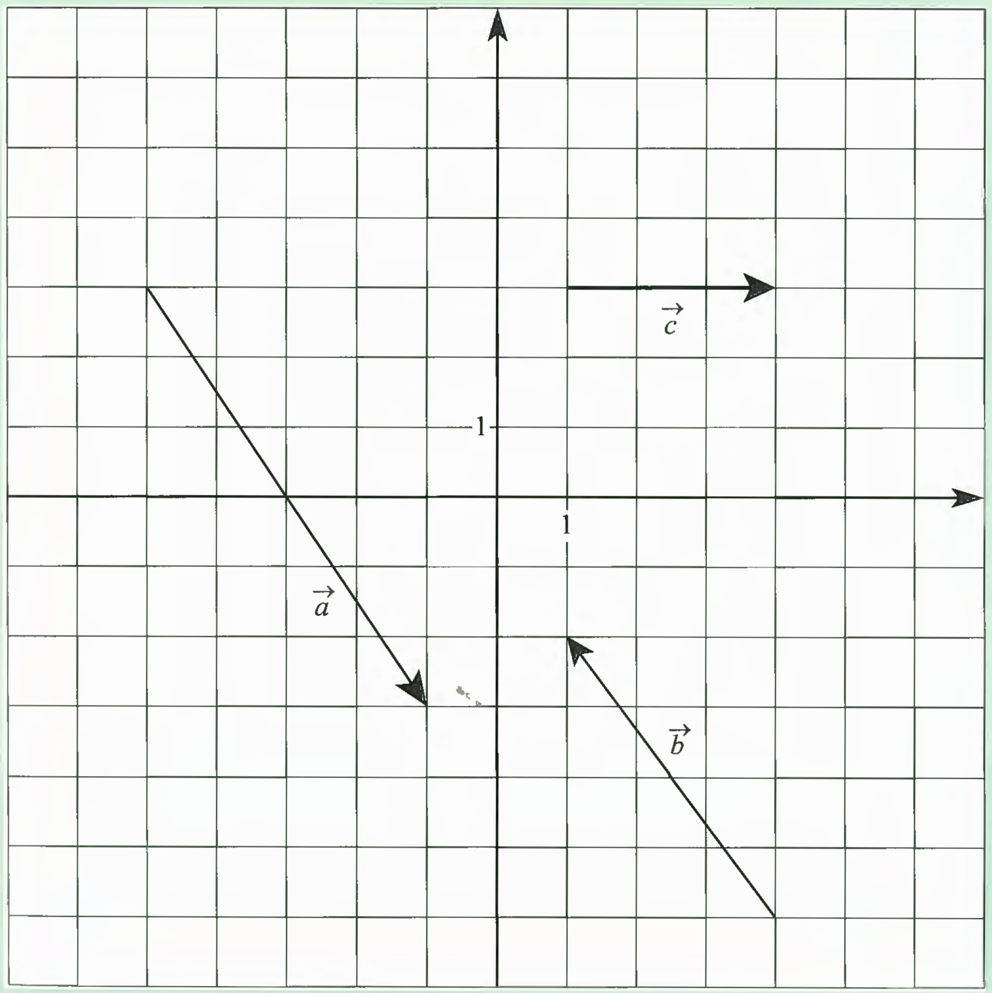
I 7.1 bevises at længden af en vektor er længden af en vilkårlig repræsentant for vektoren.

Vi ser at nulvektoren har længden 0. Altså $|\vec{o}\,|=0$.
Vi ser også at enhver egentlig vektor har en positiv længde.

En vektor med længden 1 kaldes en *enhedsvektor*.

De to lodrette streger | | betyder længden af vektoren hvis der står en vektor mellem stregerne, mens de to lodrette streger | | betyder den numeriske værdi af tallet når der står et tal mellem stregerne. Det giver normalt ingen problemer, man skal bare se sig godt for. Man kan også bruges dobbeltstreger || || til at symbolisere længden, det gøres for eksempel i en del cas-programmer, i det tilfælde er problemet der slet ikke.

2.5 Beregn længden af hver af vektorerne $\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$.



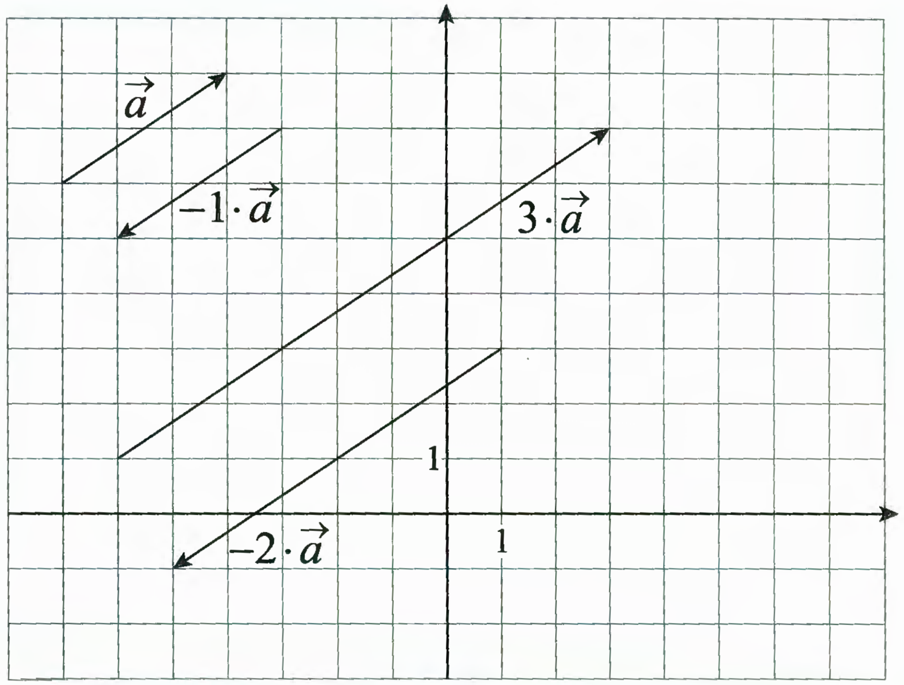
2.6 Aflæs i koordinatsystemet koordinatsættene til hver af vektorerne, og beregn vektorernes længder.

3. Regning med vektorer

Multiplikation af en vektor med et tal defineres således:

3.1 Lad t være et tal og $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en vektor.
Da defineres $t\cdot\vec{a}$ som vektoren $t\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix} t\cdot a_1 \\ t\cdot a_2 \end{pmatrix}$

Man ganger altså en vektor med et tal ved at gange hver af vektorens koordinater med tallet.



3.2 Afsæt i et koordinatsystem hver af vektorerne: $\vec{a}=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $2\cdot\vec{a}$, $0{,}5\cdot\vec{a}$, $3\cdot\vec{a}$, $-2\cdot\vec{a}$ og $-1{,}5\cdot\vec{a}$.

3.3 Afsæt i et koordinatsystem hver af vektorerne: $\vec{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $1\cdot\vec{b}$, $0{,}5\cdot\vec{b}$, $2\cdot\vec{b}$, $-1\cdot\vec{b}$ og $-2\cdot\vec{b}$.

3.4 Afsæt i et koordinatsystem hver af vektorerne: $\vec{c}=\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $2\cdot\vec{c}$, $0{,}5\cdot\vec{c}$, $3\cdot\vec{c}$, $-1\cdot\vec{c}$ og $-2{,}5\cdot\vec{c}$.

Den vektor der fremkommer ved at gange en vektor, $\vec{a}$, med -1, kaldes den *modsatte vektor* til $\vec{a}$. Den betegnes også $-\vec{a}$.

3.5 Længden af vektoren $t\cdot\vec{a}$ er

$$\left|\begin{pmatrix} t\cdot a_1 \\ t\cdot a_2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(t\cdot a_1)^2+(t\cdot a_2)^2} = \sqrt{t^2\cdot a_1^{\,2}+t^2\cdot a_2^{\,2}} = \sqrt{t^2\cdot(a_1^{\,2}+a_2^{\,2})} = \sqrt{t^2}\cdot\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}} = |t|\cdot|\vec{a}|$$

Vi ser at længden af $t\cdot\vec{a}$ er $|t|$ gange så stor som længden af $\vec{a}$.

3.6 Ved symbolet $\frac{\vec{v}}{s}$ forstås vektoren $\frac{1}{s}\cdot\vec{v}$, altså $\frac{\vec{v}}{s}=\frac{1}{s}\cdot\vec{v}$, så vi kan *dividere en vektor med et tal.*

3.7 For en egentlig vektor $\vec{a}$ får vi at vektoren $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ er en vektor der er ensrettet med $\vec{a}$, og længden bliver $\frac{1}{|\vec{a}|}$ gange længden af $\vec{a}$, altså 1. På den måde kan vi altså finde en *enhedsvektor der er ensrettet med en egentlig vektor.*

3.8 Betragt vektor $\vec{v}$ med koordinatsæt $\vec{v}=\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.
Beregn koordinatsættene til hver af vektorerne $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, $\frac{\vec{v}}{2}$ og $\frac{\vec{v}}{3}$.
Indtegn vektorerne i et koordinatsystem.

At to vektorer er parallelle, kan defineres på følgende måde.

3.9 To egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kaldes *parallelle* netop når der findes et tal t, med $t\neq 0$, så $\vec{a}=t\cdot\vec{b}$

Der er to vigtige specialtilfælde af 3.9:

3.10 To egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kaldes *ensrettede* netop når der findes et positivt tal t, så $\vec{a}=t\cdot\vec{b}$

3.11 To egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kaldes *modsat rettede* netop når der findes et negativt tal t, så $\vec{a}=t\cdot\vec{b}$

En egentlig vektor kan være parallel med en linje:

3.12 En egentlig vektor er parallel med en linje netop når der findes en repræsentant for vektoren, hvor både start- og slutpunkt ligger på linjen.

Disse definitioner er lavet så de stemmer overens med det vi ved om hvad det vil sige at være parallelle eller ensrettede eller modsat rettede. For eksempel gælder at to vektorer der er parallelle med den samme tredje vektor er parallelle.

Når en vektor er parallel med en linje, siger vi også at linjen er parallel med vektoren.

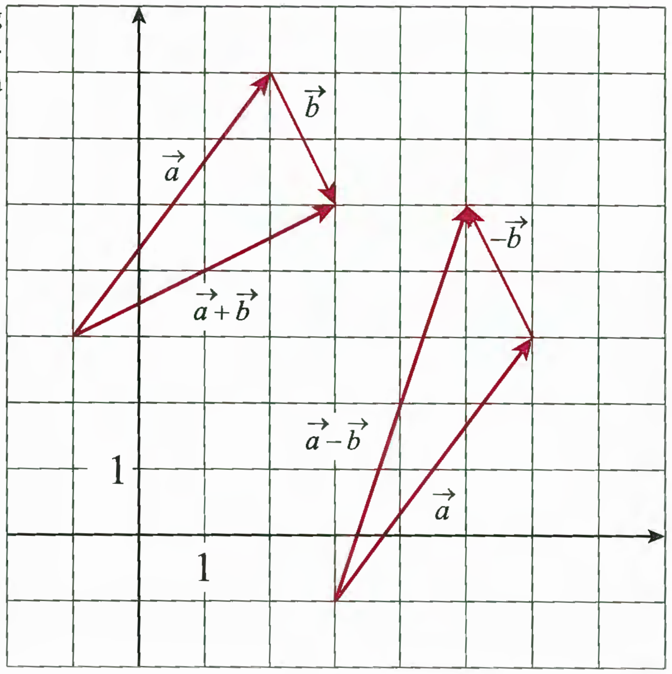
Vi kan lægge vektorer sammen, og vi kan trække en vektor fra en vektor. Definitionen er

3.13 Lad $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ være to vektorer.

Summen af vektorerne er $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$

Differensen mellem vektorerne er $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix}$

Geometrisk kan sum og differens mellem to vektorer illustreres som vist på figuren.



Multiplikation af en vektor med et tal og sum og differens er indført ved at vi for hver af koordinaterne gør som vi plejer at gøre for reelle tal. Derfor gælder de "naturlige" sammenhænge, som vi nødigt ville undvære, for eksempel

$$\vec{a}+\vec{a}=2\cdot\vec{a}$$
$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{o}$$
$$(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}=\vec{a}$$
$$\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$$

3.14 Tjek ved at regne efter i koordinater at der gælder disse sammenhænge.

3.15 Betragt vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$

Bestem samtlige vektorer der kan fremkomme ved at lægge to af disse vektorer sammen eller trække dem fra hinanden.
Vis desuden samtlige vektorer i et koordinatsystem.

Nogle af de vigtigste regler for regning med vektorer er samlet i den følgende sætning:

3.16 For alle vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$, og for alle tal s og t gælder

a) $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$
b) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (den associative lov)
c) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (den kommutative lov)
d) $(s+t)\vec{a}=s\vec{a}+t\vec{a}$
e) $s(\vec{a}+\vec{b})=s\vec{a}+s\vec{b}$
f) $s(t\vec{a})=(st)\vec{a}$
g) $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{c}$

Bevis: Sætningen bevises ved bruge definitionerne og regne på koordinaterne.
For eksempel kan d) bevises således:

$$(s+t)\cdot\vec{a}=(s+t)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(s+t)\cdot a_1\\(s+t)\cdot a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\cdot a_1+t\cdot a_1\\s\cdot a_2+t\cdot a_2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}s\cdot a_1\\s\cdot a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\cdot a_1\\t\cdot a_2\end{pmatrix}=s\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=s\cdot\vec{a}+t\cdot\vec{a}$$

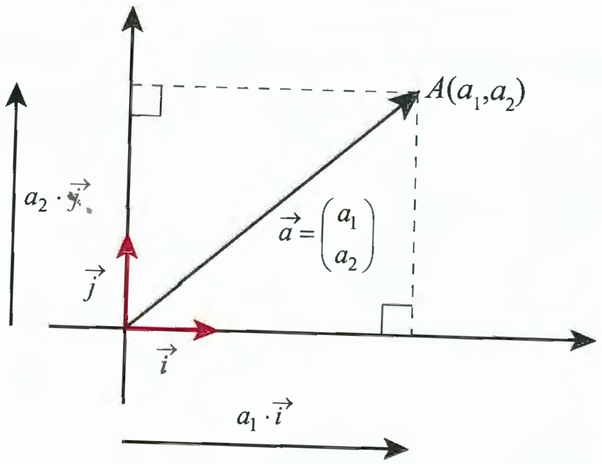
Hermed er d) bevist. De øvrige skal du selv bevise i den følgende øvelse.

3.17 Bevis de øvrige påstande i sætning 3.16.

3.18 Der er to vektorer i koordinatsystemet der har fået særlige navne, det er vektorerne

$$\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ og } \vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

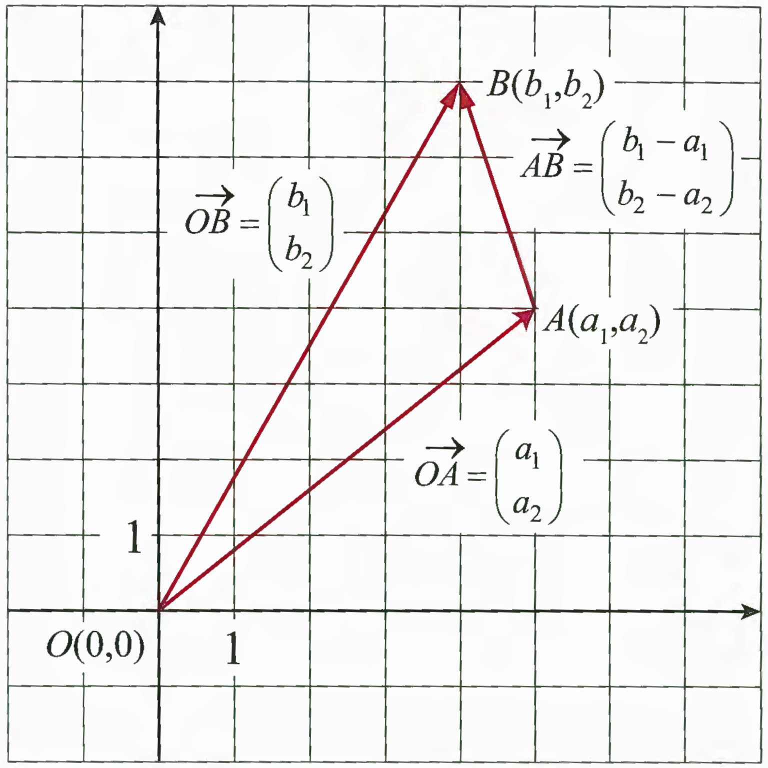
De kaldes koordinatsystemets *basisvektorer*.
Vektoren $\vec{i}$ kaldes da første basisvektor, og vektor $\vec{j}$ kaldes anden basisvektor.



3.19 Vi ser at for en vilkårlig vektor $\vec{a}$ gælder

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\a_2\end{pmatrix}=a_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+a_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}$$

På denne måde kan enhver vektor altså skrives som en linearkombination (hovsa, fik du fat i det nye ord?) af basisvektorerne.



3.20 Hvis pilen *fra* punktet A *til* punktet B er en repræsentant for en vektor, bruges betegnelsen $\overrightarrow{AB}$ for vektoren. For et punkt $A(a_1, a_2)$ er da vektor $\overrightarrow{OA}$ stedvektoren for punktet A, og $\overrightarrow{OA}$ har derfor koordinatsæt $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Når vi afsætter en repræsentant for vektoren med koordinatsæt $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ ud fra punktet $A(a_1, a_2)$, ender repræsentanten i punktet B med koordinatsæt (b_1, b_2), for vi ved at endepunktet er $(a_1 + (b_1 - a_1), a_2 + (b_2 - a_2))$.

3.21 Heraf ser vi at

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Vektorens koordinatsæt er derfor slutpunktets koordinatsæt minus startpunktets koordinatsæt. Vi kan også skrive dette:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

3.22 Bestem koordinatsættet for vektoren $\overrightarrow{AB}$ når $A = (1,6)$ og $B = (-4,3)$.

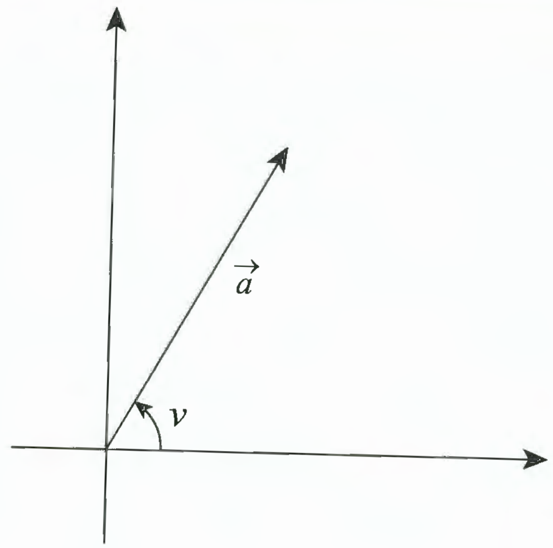
3.23 Bestem koordinatsættet for vektoren $\overrightarrow{AB}$ når $A = (-3,-5)$ og $B = (7,13)$.

Der gælder følgende sætning, der kaldes *indskudssætningen* eller *indskudsreglen*:

3.24 For vilkårlige punkter A, B og C i planen gælder $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

3.25 Bevis sætning 3.24 ved regning med koordinater, og illustrer indholdet ved hjælp af en figur.

Retningen af en egentlig vektor kan vi finde som vinklen fra førsteaksens positive retning til den repræsentant for vektoren der starter i origo. Vinklen regnes som sædvanlig med fortegn mod uret. En sådan vinkel kaldes en *retningsvinkel for vektoren*. Normalt taler vi ikke om nogen retning for nulvektoren.



Den nemmeste måde at finde retningsvinklen på er at bruge lommeregner eller computerprogram. I TI-InterActive! ser det sådan ud:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \text{toPolar} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 5. \\ \angle -126.87 \end{bmatrix}$$

At der skal skrives "toPolar" kommer af at programmet regner om til *polære koordinater*, det betyder at vektoren angives ved længden og retningsvinklen. Ordren den modsatte vej er toRect (to rectangular, altså til koordinater i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem)

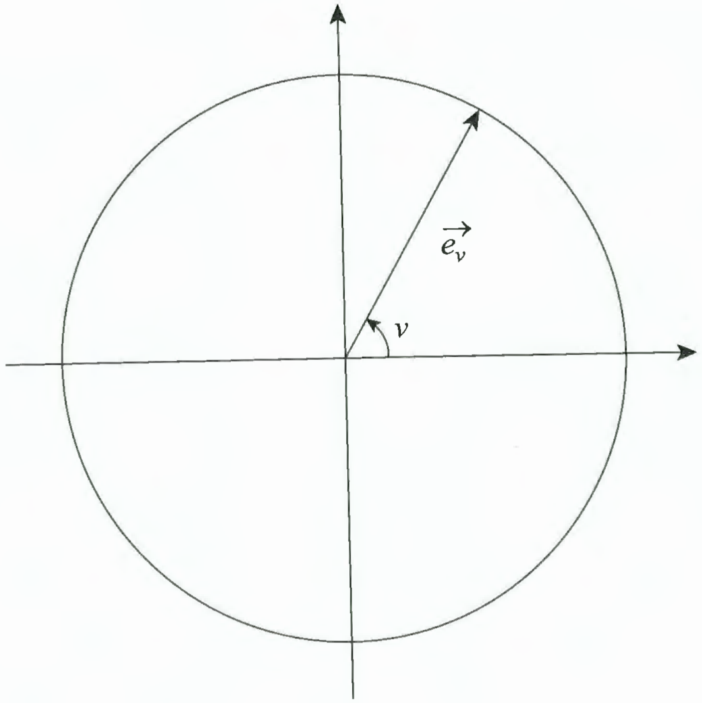
$$\begin{bmatrix} 2 \\ \angle 60 \end{bmatrix} \text{toRect} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

3.26 Bestem længde og retningsvinkel for hver af vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

3.27 Bestem længde og retningsvinkel for hver af vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 23 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$



Hvis vi betragter en enhedsvektor $\vec{e_v}$ der danner vinklen v med førsteaksen, ved vi ud fra definitionen af cosinus og sinus at koordinatsættet til vektoren er

$$\vec{e_v} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$

3.28 Beregn koordinatsættet til den enhedsvektor der danner vinklen 147° med førsteaksen.

3.29 En vilkårlig vektor kan skrives på formen

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e_v} = |\vec{a}| \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$

hvor v er en retningsvinkel for vektoren (for nulvektoren kan en vilkårlig vinkel bruges).

Bevis: Det er klart at sætningen er sand for nulvektoren. Enhver egentlig vektor kan skrives

$$\vec{a} = 1 \cdot \vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \left(|\vec{a}| \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} \right) \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \left(\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \right)$$

Her ved vi at vektoren i den sidste parentes en enhedsvektor der er ensrettet med $\vec{a}$. Læg mærke til at vi ved det sidste lighedstegn brugte 3.16 f). Hermed er sætningen bevist.

3.30 Betragt de fire vektorer:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Hvilke af vektorerne er parallelle?
Hvilke af vektorerne er ensrettede?
Hvilke af vektorerne er modsat rettede?

3.31 Betragt de fire vektorer:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Hvilke af vektorerne er parallelle?
Hvilke af vektorerne er ensrettede?
Hvilke af vektorerne er modsat rettede?

3.32 Beregn for ethvert muligt par af vektorer i 3.30 summen af vektorerne.
Beregn for ethvert muligt par af vektorer i 3.30 differensen mellem vektorerne.

3.33 Beregn for ethvert muligt par af vektorer i 3.31 summen af vektorerne.
Beregn for ethvert muligt par af vektorer i 3.31 differensen mellem vektorerne.

3.34 Betragt de tre punkter $A(-4{,}3)$, $B(2{,}7)$ og $C(6{,}-1)$.
Bestem koordinatsættene til hver af vektorerne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AC}$.
Tjek at $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, og vis punkterne og vektorerne i et koordinatsystem.

3.35 Betragt de tre punkter $A(8{,}2)$, $B(-3{,}-4)$ og $C(8{,}5)$.
Bestem koordinatsættene til hver af vektorerne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AC}$.
Tjek at $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, og vis punkterne og vektorerne i et koordinatsystem.

3.36 Skriv vektoren $\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ som en enhedsvektor gange længden af vektoren.

3.37 Skriv vektoren $\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ som en enhedsvektor gange længden af vektoren.

3.38 Bestem koordinatsættet til den vektor der har længden 7, og som er ensrettet med vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.39 Bestem koordinatsættet til den vektor der har længden 3, og som er modsat rettet vektoren $\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix}$.

3.40 Betragt viserne på et ur som repræsentanter for to vektorer.
Vi indlægger et koordinatsystem med origo i urets centrum, og hvor førsteaksen peger i retning af kl. 3 og andenaksen i retning af kl. 12.
Den lille viser har længden 2, og den store har længden 3.
Bestem koordinatsættet til viservektorerne kl. 6, kl. 2.30, kl. 11.37.

3.41 (Fortsættelse af 3.40)
a) Bestem det første tidspunkt efter kl. 12 hvor viserne står vinkelret på hinanden.
b) Bestem koordinatsættet til viservektorerne på det tidspunkt.
c) Bestem det første tidspunkt efter kl. 12 hvor viserne er modsat rettede.
d) Bestem koordinatsættet til viservektorerne på det tidspunkt.
e) Bestem det andet tidspunkt efter kl. 12 hvor viserne står vinkelret på hinanden.
f) Bestem koordinatsættet til viservektorerne på det tidspunkt.

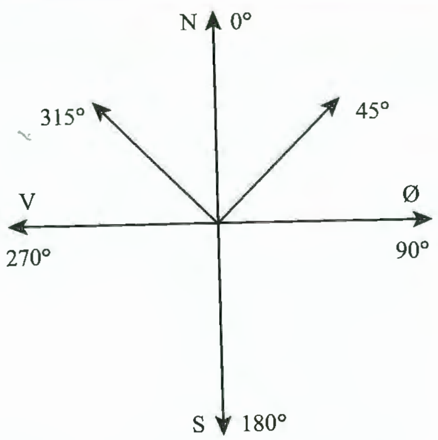
3.42 En del af en muldvarps gangsystem kan i et koordinatsystem beskrives ved vektorerne

$$\begin{pmatrix}-5\\11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6,5\\3,5\end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix}-5,5\\-0,5\end{pmatrix}$$

hvor vektorerne har repræsentanter der går fra muldskud til muldskud i rækkefølge.
a) Hvad er den samlede længde af gangsystemet?
b) Bestem vektoren fra start til slut af gangsystemet.
c) Hvad er afstand og retning fra start til slut af gangsystemet (dvs. hvad er de polære koordinater til vektoren i b)?

3.43 Kompasretninger angives i grader fra nordretningen, og kompasretninger regnes positive i negativ omløbsretning.

3.44 En sømil er afstanden 1852 m.
Hastigheder til søs måles i knob.
1 knob er 1 sømil/time.



3.45 Ved en kapsejlads er bøjerne udlagt så der
fra startstedet til den 1. bøje er vektoren $\begin{pmatrix}4,5\\6,2\end{pmatrix}$, og
fra den 1. til den 2. er vektoren $\begin{pmatrix}-5,8\\4,6\end{pmatrix}$, og
fra den 2. til den 3. er vektoren $\begin{pmatrix}-4,1\\-6,4\end{pmatrix}$, og
fra den 3. til slutstedet er vektoren $\begin{pmatrix}4,9\\-4,1\end{pmatrix}$

Hvor lang er den minimale strækning der skal sejles på kapsejladsen?
Hvad er vektoren fra startsted til slutsted?
Hvor langt i km er der fra startsted til slutsted? Vektorerne ovenfor er angivet i sømil (se 3.44)
Hvad er kompasretningen (se 3.43) fra startsted til slutsted når koordinaterne til vektorerne ovenfor er angivet i et koordinatsystem med andenaksen pegende mod nord og førsteaksen mod øst.

3.46 Supertankeren sejler 25 knob i kompasretningen 41° (se 3.43 og 3.44). På dækket kører en cyklist med hastighed 15 km/time, og retningen er 17° i positiv omløbsretning i forhold til supertankerens sejlretning.
Hvad er cyklistens hastighed i km/time i forhold til Jorden, og hvilken kompasretning cykler han i?

4. Skalarprodukt

Vi kan definere et produkt mellem to vektorer på følgende måde:

4.1 *Skalarproduktet* mellem vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Vi får for eksempel

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 + 5 \cdot (-6) = -18$$

Skalarproduktet af to vektorer er altså et tal (en skalar) og ikke en vektor.
Skalarproduktet kaldes også *prikproduktet* (på engelsk dot product), og *gangetegnet* ***skal*** *skrives*. Det er ikke som ved gangetegn mellem tal eller gangetegnet mellem et tal og en vektor, hvor vi ofte undlader at skrive noget.
CAS-programmer vil gerne have det skrevet på en lidt anden måde, i TI InterActive! for eksempel:

$$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}\right) \qquad = 6$$

I slutningen af dette afsnit finder du mere om hvordan man kan bruge cas-programmet i forbindelse med vektorer.

4.2 Udregn hvert af skalarprodukterne

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

En vektors skalarprodukt med sig selv giver

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 = a_1^2 + a_2^2$$

altså vektorens længde, $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, i anden.

En vektors skalarprodukt med sig selv skrives kort

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2}$$

Med denne notation kan vi altså skrive

4.3 $$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

4.4 Der gælder følgende regneregler for regning med skalarprodukt

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (den kommutative lov)

b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (den distributive lov)

c) $(t \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (t \cdot \vec{b}) = t \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

d) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$

Formlen i d) er blot en gentagelse af formel 4.3, som vi viste ovenfor. De øvrige formler skal du selv bevise i 4.5.

4.5 Bevis formlerne 4.4 a), b) og c) ved udregning med koordinater.

Vinklen $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ *mellem* to egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er den mindste vinkel den ene vektor skal drejes for at blive ensrettet med den anden. Denne vinkel regnes ikke med fortegn, så der gælder for alle vektorer at

4.6 $$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{a})$$

og

4.7 $$0° \leq \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq 180°$$

Skalarproduktet afhænger af vektorerne og deres beliggenhed på følgende måde:

4.8 Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer, og lad v betegne vinklen mellem vektorerne. Da gælder

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

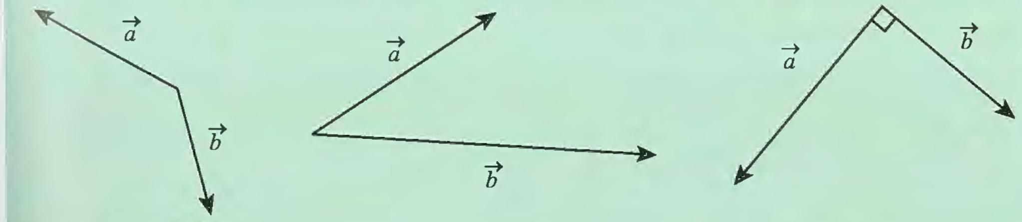
Denne sætning bevises i 7.7.

Ofte vil man anvende formlen

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

også i det tilfælde hvor mindst en af vektorerne er nulvektoren. I det tilfælde er vinklen v ikke defineret, men det er ligegyldigt hvilken værdi for vinklen man sætter ind, formlen bliver alligevel sand.

4.9 Bestem i hvert af de tre tilfælde nedenfor fortegnet for $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ud fra figuren.



Vi ved at $\cos(v) > 0$ hvis $0° \le v < 90°$

$\cos(v) = 0$ hvis $v = 90°$

$\cos(v) < 0$ hvis $90° < v \le 180°$

(Tænk for eksempel på enhedscirklen). Derfor gælder ifølge 4.8

4.10 For egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder at

$$0° \le \angle(\vec{a},\vec{b}) < 90° \quad \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} > 0$$
$$\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90° \quad \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$
$$90° < \angle(\vec{a},\vec{b}) \le 180° \quad \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} < 0$$

Men hvad kan vi så slutte om vinklen mellem to egentlige vektorer ud fra fortegnet for $\vec{a}\cdot\vec{b}$? Ud fra overvejelserne ovenfor kan vi se at der gælder

4.11 a) Hvis $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\angle(\vec{a},\vec{b})) > 0$, da må $\cos(\angle(\vec{a},\vec{b})) > 0$, og derfor er $0° \le \angle(\vec{a},\vec{b}) < 90°$

b) Hvis $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\angle(\vec{a},\vec{b})) < 0$, da må $\cos(\angle(\vec{a},\vec{b})) < 0$, og derfor er $90° < \angle(\vec{a},\vec{b}) \le 180°$

c) Hvis $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\angle(\vec{a},\vec{b})) = 0$, da må ifølge nulreglen $|\vec{a}| = 0 \lor |\vec{b}| = 0 \lor \cos(\angle(\vec{a},\vec{b})) = 0$
Men da vi har forudsat at vektorerne er egentlige, får vi heraf at $\cos(\angle(\vec{a},\vec{b})) = 0$. Så er $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90°$, for vi ved at $0° \le \angle(\vec{a},\vec{b}) \le 180°$.

Af 4.10 og 4.11 får vi:

4.12 For *egentlige* vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0° \le \angle(\vec{a},\vec{b}) < 90°$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \angle(\vec{a},\vec{b}) = 90°$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 90° < \angle(\vec{a},\vec{b}) \le 180°$$

Vi formulerer også en vigtig del af denne sætning med ord:

4.13 To egentlige vektorer er ortogonale netop når deres skalarprodukt er nul.

Bemærk at vi ***ikke*** ud fra $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ kan slutte at vektorerne er ortogonale, det kan være at en af vektorerne er nulvektoren.

4.14 Vi vil bestemme de tal t for hvilke vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 4t \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

er ortogonale.

Skalarproduktet mellem vektorerne er $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3t^2 + 24t$
Vi får da $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 24t = 0 \Leftrightarrow 3t\cdot(t+8) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \lor t = -8$

For $t = 0$ er $\vec{a} = \vec{o}$, så vektorerne er ikke ortogonale for denne værdi af t.

For $t = -8$ er $\vec{a} = \begin{pmatrix} 64 \\ -32 \end{pmatrix}$, så vektorerne er egentlige, og af 4.12 får vi at vektorerne er ortogonale for denne værdi af t.
Der er altså én værdi, $t = -8$, for hvilken vektorerne er ortogonale.

4.15 Bestem i hvert tilfælde de tal t for hvilke vektorerne er ortogonale:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2t \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4t \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 6 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t+1 \end{pmatrix}$

Vinklen mellem to vektorer kan vi finde ved hjælp af følgende sætning:

4.16 Vinklen mellem to egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemmes ud fra formlen

$$\cos(v) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Bevis: Formlen følger umiddelbart af formlen i 4.8, når de to længder ikke er nul.

4.17 Vinklen v mellem vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

finder vi af

$$\cos(v) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}} = \frac{-2}{\sqrt{200}}$$

Heraf får vi

$$v = 98{,}13°$$

Da vi her finder vinklen mellem to vektorer, ved vi at der kun er en løsning, for vi ved at $0° \le v \le 180°$.

4.18 Bestem i hvert tilfælde vinklen mellem vektorerne.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

En *tværvektor* til en given vektor defineres på følgende måde:

4.19 Tværvektoren til en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ er vektoren $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

Om tværvektorer gælder følgende grundlæggende sætning:

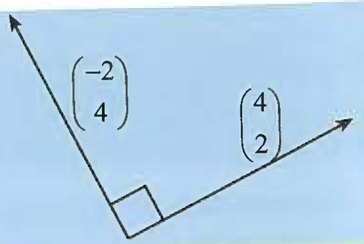
4.20 Tværvektoren $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ har samme længde som $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Tværvektoren til en egentlig vektor fremkommer ved at dreje vektoren 90° i positiv omløbsretning.

Beviset for denne sætning finder du i 7.8.

4.21 Tværvektoren til vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ er vektoren

$$\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$



4.22 Bestem tværvektoren til hver af vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Det kan være hensigtsmæssigt at have færdige rutiner liggende til nogle af udregningerne med vektorer. Man behøver så blot skifte tallene ud for at få beregningerne udført.

4.23 I TI InterActive! definerer vi to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ således:

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} :: \vec{b} := \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Skalarproduktet er da

$$\text{dotP}(\vec{a}, \vec{b}) \quad \rightarrow 28$$

Det kunne vi nu også let finde ved håndkraft eller ved nyindtastning. Men vi kan ved brug af 4.16 også finde gradtallet for vinklen v mellem vektorerne således:

$$v := \arccos\left(\frac{\text{dotP}(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right) \quad \rightarrow 58.67$$

og den formel kan være god at have liggende.

TI InterActive! er ikke umiddelbart begejstret for at finde en tværvektor, men det kan klares ved hjælp af denne formel:

$$\hat{\vec{a}} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{a} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} -3. \\ 4. \end{bmatrix}$$

Den kantede parentes med de fire tal i er en såkaldt matrix. Du kan læse mere om matricer i appendiks 7.

4.24 Vi kan også indtaste vektorer hvor der i koordinaterne indgår en parameter

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} t^2 \\ 2\cdot t + 1 \end{bmatrix} :: \vec{b} := \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Vi kan da finde de tal for hvilke skalarproduktet er nul

$$\text{solve}(\text{dotP}(\vec{a}, \vec{b}) = 0, t) \quad \rightarrow t = \frac{\sqrt{14} + 2}{5} \text{ or } t = \frac{-(\sqrt{14} - 2)}{5}$$

Hvis vi vil finde de tal t for hvilke vektorerne er ortogonale, må vi lige tjekke om vektor $\vec{a}$ bliver nulvektoren for nogen af disse t-værdier. Det kan vi enten gøre ved håndkraft, eller vi kan få programmet til at finde de to vektorer der fremkommer:

$$\vec{a} \,|\, t = \frac{\sqrt{14} + 2}{5} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1.31867 \\ 3.29666 \end{bmatrix} \qquad \vec{a} \,|\, t = \frac{-(\sqrt{14} - 2)}{5} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} .121335 \\ .303337 \end{bmatrix}$$

Da ingen af disse vektorer er nulvektoren, er vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ altså ortogonale netop når $t = \frac{2 + \sqrt{14}}{5}$ eller $t = \frac{2 - \sqrt{14}}{5}$.

4.25 Bestem vinklen mellem vektorerne:

a) $\begin{pmatrix} 89 \\ -17 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -11 \\ -58 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 14 \\ 32 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 47 \\ 11 \end{pmatrix}$

4.26 Bestem vinklen mellem vektorerne:

a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 26 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 32 \\ -42 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 13 \\ 43 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0,54 \\ -0,69 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 34,2 \\ -67,9 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 15,7 \\ 45,6 \end{pmatrix}$

4.27 Bestem de værdier af tallet t for hvilke vektorerne er ortogonale:

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ t \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 23 \\ 53 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} t \\ 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 16 \\ 11 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 45 \\ t \end{pmatrix}$

4.28 Bestem eventuelle værdier af tallet t for hvilke vektorerne er ortogonale:

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2t \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -7 \\ t \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2t+1 \\ 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 3t-6 \\ 5 \end{pmatrix}$

4.29 Bestem eventuelle værdier af tallet t for hvilke vektorerne er ortogonale:

a) $\begin{pmatrix} t-4 \\ 2t-8 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2t \\ 7t \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} t-11 \\ 35-t \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3-t \\ 2t-6 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} t \\ 4 \end{pmatrix}$

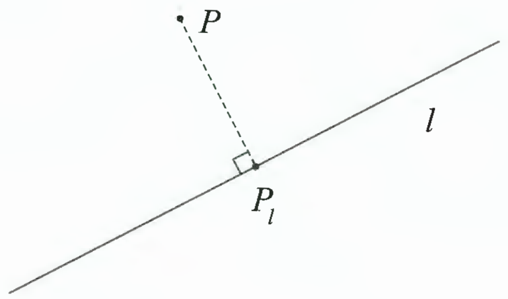
4.30 Betragt vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ t \end{pmatrix}$$

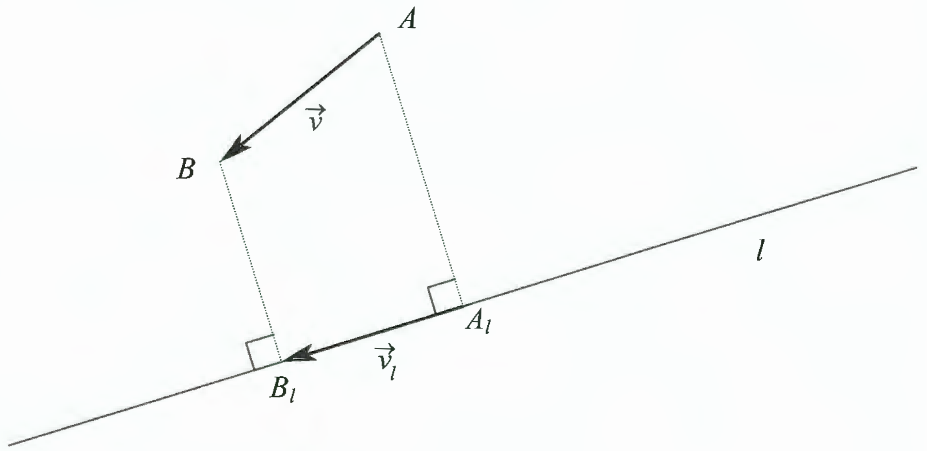
Bestem eventuelle værdier af tallet t for hvilke vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

a) 5° b) 31° c) 37° d) 157°

5. Projektion af vektor på vektor



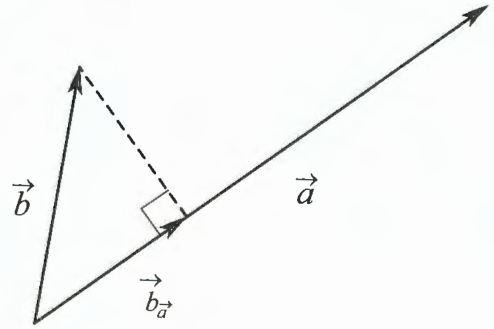
Vi kan projicere et punkt P på en linje l. Det vil sige at vi finder det punkt P_l på l hvor en linje gennem P vinkelret på l skærer l.



Vi kan også projicere en vektor på en linje. Det foregår således: Vi tager en repræsentant for vektoren, og så projicerer vi start- og slutpunkt på linjen. Så er pilen fra startpunktets projektion til slutpunktets projektion en repræsentant for den projicerede vektor. Hvis vi vil være meget omhyggelige, må vi argumentere for at vi får repræsentanter for den samme vektor uanset hvilken repræsentant vi starter med. Det vil vi ikke argumentere for.

Vi kan projicere en vektor $\vec{b}$ på en egentlig vektor $\vec{a}$. Det vil sige at vi projicerer vektor $\vec{b}$ på en linje der er parallel med $\vec{a}$.

Også her burde vi argumentere, denne gang for at vi får repræsentanter for den samme vektor uanset hvilken parallel linje vi bruger. Det vil vi heller ikke argumentere for.



Vi kan finde projektionen af en vektor på en vektor ved hjælp af følgende sætning:

5.1 Lad $\vec{b}$ være en vektor, og lad $\vec{a}$ være en egentlig vektor. Da er projektionen af vektor $\vec{b}$ på vektor $\vec{a}$ givet ved:

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}$$

Beviset for 5.1 finder du i 7.9.

Den vektor vi får ved at projicere vektor $\vec{a}$ på vektor $\vec{b}$, er ud fra 5.1

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}$$

5.2 Projektionen af $\vec{b}=\begin{pmatrix}14\\2\end{pmatrix}$ på vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ er

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a} = \frac{\begin{pmatrix}14\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right|^2}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{50}{25}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$$

5.3 Bestem projektionen af $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ på vektor $\vec{b}=\begin{pmatrix}14\\2\end{pmatrix}$

5.4 Bestem i hvert tilfælde projektionen $\vec{b}_{\vec{a}}$ af vektor $\vec{b}$ på vektor $\vec{a}$.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-10\\-6\end{pmatrix}$

d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}11\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\-7\end{pmatrix}$

At finde projektionen af en vektor på en vektor kan vi også overlade til cas-værkjtøjet, her TI InterActive!:

5.5 Vektorerne defineres:

$$\vec{a} := \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} :: \vec{b} := \begin{bmatrix}10\\-4\end{bmatrix}$$

og projektionerne af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ og af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ findes:

$$\vec{a}_{\vec{b}} := \frac{\mathrm{dotP}(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{b}\|^2}\cdot\vec{b} \rightarrow \begin{bmatrix}\frac{70}{29}\\ \frac{-28}{29}\end{bmatrix} \qquad \vec{b}_{\vec{a}} := \frac{\mathrm{dotP}(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}\cdot\vec{a} \rightarrow \begin{bmatrix}\frac{112}{25}\\ \frac{84}{25}\end{bmatrix}$$

Her er valgt at resultaterne skal være eksakte, men vi kan selvfølgelig også vælge at få de tilnærmede værdier.

5.6 Bestem i hvert tilfælde projektionerne $\vec{b}_{\vec{a}}$ og $\vec{a}_{\vec{b}}$ ved hjælp af cas-programmet

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\17\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$ b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-9\\10\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}14\\8\end{pmatrix}$

5.7 Bestem i hvert tilfælde projektionerne $\vec{b}_{\vec{a}}$ og $\vec{a}_{\vec{b}}$ ved hjælp af cas-programmet

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$ b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}12\\17\end{pmatrix}$

Det er mere besværligt at skubbe en bil eller vogn hvis man ikke kan komme til at stå lige bag ved og skubbe i bevægelsesretningen. En skistav der står næsten lodret, er ikke meget bevendt hvis man gerne vil bruge skistaven for at komme fremad.
Det er projektionen af kraftvektoren på bevægelsesretningen der giver den kraft der giver fremdrift.

5.8 Når man træder på en cykelpedal, er det projektionen vinkelret på pedalarmen af den kraft cyklisten presser pedalen nedad med, der giver den kraft der bringer cyklen fremad.

a) Gør rede for at hvis v betegner pedalarmens vinkel med vandret, da er længden af projektionen vinkelret på pedalarmen givet ved

$$F\cdot\cos(v)$$

hvor F er størrelsen af den lodrette kraft på pedalen.

b) Hvor mange procent af den lodrette kraft udnyttes til fremdrift hvis vinklen er 0°, 10°, 20°, ... , 80°.

5.9 I nogle former for skiløb bruges lange skistave.
a) Hvorfor kan lange skistave være en fordel?
b) Vis ved eksempler hvor stor forskel det kan gøre.

5.10 Givet vektorerne

$$\vec{a} := \begin{bmatrix}2\cdot t^2\\ -5\cdot t+1\end{bmatrix} :: \vec{b} := \begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix}$$

Vi vil undersøge om der findes værdier af t, så projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er $3\cdot\vec{b}$. For en sådan værdi af t skal den faktor der er ganget på $\vec{b}$ i projektionsformlen, være lig med 3. Vi løser derfor ligningen:

$$\mathrm{solve}\left(\frac{\mathrm{dotP}(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{b}\|^2}=3, t\right) \rightarrow t=\frac{-(\sqrt{9649}+25)}{24} \text{ or } t=\frac{\sqrt{9649}-25}{24}$$

Hermed har vi fundet at der findes to værdier af t der opfylder kravet, og vi har fundet de to værdier.

5.11 Betragt vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ med koordinatsæt

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}t\\-14\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

Undersøg om der findes værdier af t, så projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er $-2\cdot\vec{b}$.

5.12 Betragt vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ med koordinatsæt

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}t\\-4\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}16\\7\end{pmatrix}$$

Undersøg om der findes værdier af t, så projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ er $\vec{a}$.

5.13 Betragt vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ med koordinatsæt

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}t^2\\t+1\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$$

Undersøg om der findes værdier af t, så projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er $½\cdot\vec{b}$.

6. Determinant

Determinanten for et vektorpar er defineret på følgende måde:

6.1 Determinanten for vektorparret $(\vec{a},\vec{b})$ er defineret ved

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \det\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right) = a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1$$

Man kan også skrive determinanten ved hjælp af determinantsymbolet | |. Ja, det ligner igen tegnet for numerisk værdi, men denne gang skal der fire tal ind mellem de to streger. Definitionen er

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix} = a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1$$

Vi får for eksempel

$$\det\left(\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix}3 & 2\\5 & 7\end{vmatrix} = 3\cdot 7 - 5\cdot 2 = 11$$

Determinanten for et vektorpar er altså også et tal (en skalar) og ikke en vektor. CAS-programmerne vil gerne have det skrevet på en lidt anden måde, for eksempel:

$$\det\left(\begin{bmatrix}6 & 8\\7 & 12\end{bmatrix}\right) \qquad = 16$$

6.2 Bestem hver af determinanterne:

a) $\det\left(\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}\right)$ b) $\det\left(\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right)$

c) $\det\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}\right)$ d) $\det\left(\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\-14\end{pmatrix}\right)$

6.3 Bestem hver af determinanterne:

a) $\begin{vmatrix}8 & -2\\5 & 6\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1 & 5\\9 & -16\end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix}12 & -3\\-4 & -2\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}34 & -68\\-65 & 130\end{vmatrix}$

Sammenhængen mellem determinant og skalarprodukt er følgende:

6.4 $\det(\vec{a},\vec{b}) = \hat{\vec{a}}\cdot\vec{b}$

Du skal selv bevise 6.4 i 6.7.

Når man regner en determinant ud, er det vigtigt at holde styr på rækkefølgen af de to vektorer idet der gælder

6.5 $\det(\vec{a},\vec{b}) = -\det(\vec{b},\vec{a})$

Også 6.5 skal du selv bevise i 6.7.

Der gælder også regler svarende til 4.4 b) og c) for regning med determinanter.

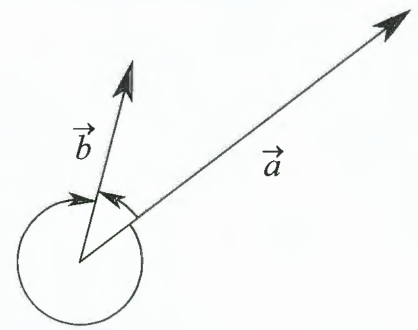
6.6 a) $\det(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = \det(\vec{a},\vec{b}) + \det(\vec{a},\vec{c})$

b) $\det(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = \det(\vec{a},\vec{c}) + \det(\vec{b},\vec{c})$

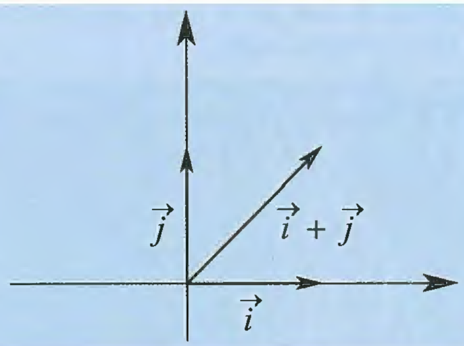
c) $\det(t\cdot\vec{a},\vec{b}) = \det(\vec{a},t\cdot\vec{b}) = t\cdot\det(\vec{a},\vec{b})$

6.7 Bevis 6.4, 6.5 og 6.6 ved udregning.

Vinklen *fra* en vektor *til* en anden er en af de drejningsvinkler der drejer den første vektor over i en vektor der er ensrettet med den anden vektor. Vinklen regnes med fortegn. Det er noget underligt at det hedder vinkl*en* i ental når der nu er mange vinkler at vælge imellem. Grunden til at det går godt, er at der er 360° mellem de forskellige muligheder, og både cosinus og sinus giver samme værdi i to vinkler der afviger med 360°. Ofte vælger man den numerisk mindste vinkel mellem to vektorer, og man kan da altid bruge en vinkel i intervallet]−180°;180°].



6.8 Vinklen fra vektor $\vec{i}+\vec{j}$ til vektor $\vec{i}$ er −45°. Vi kan også bruge 315° som vinkel fra vektor $\vec{i}+\vec{j}$ til vektor $\vec{i}$.



6.9 

Betragt viserne på et viserur som vektorer. Bestem både en positiv og en negativ vinkel fra den store til den lille viser når klokken er

a) 15.00

b) 16.30

6.10 Lad $\vec{a}$ til $\vec{b}$ være to egentlige vektorer. Lad u, $-180° < u \le 180°$ betegne vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$. Da gælder

$$\det(\vec{a},\vec{b}) > 0 \Leftrightarrow 0° < u < 180°$$
$$\det(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow u = 0° \vee u = 180°$$
$$\det(\vec{a},\vec{b}) < 0 \Leftrightarrow -180° < u < 0°$$

Sætning 6.10 udtrykker at determinanten er positiv hvis $\vec{b}$ ligger "til venstre" for $\vec{a}$, mens determinanten er negativ hvis $\vec{b}$ ligger "til højre" for $\vec{a}$.

Bevis for 6.10: Vi får af 6.4 og 4.12 at

$$\det(\vec{a},\vec{b}) > 0 \Leftrightarrow \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow 0° \le \angle(\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}) < 90° \Leftrightarrow 0° < u < 180°$$

De øvrige dele af 6.10 skal du selv bevise i 6.11.

6.11 Bevis resten af 6.10 ud fra 6.4 og 4.12.

Også determinanten kan udtrykkes ved længden af vektorerne og en vinkel:

6.12 Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer, og lad u være vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$. Da gælder

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(u)$$

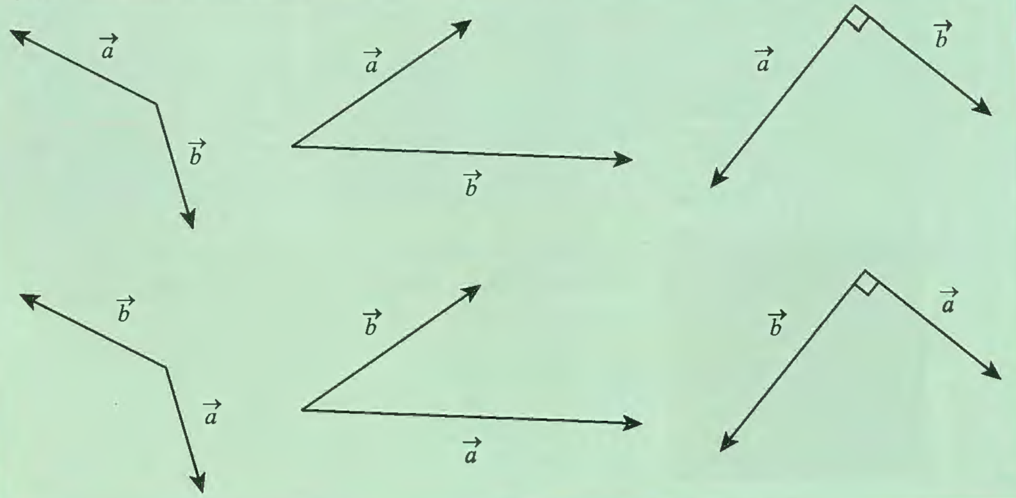
Se bemærkningen nedenfor om sætningens brug også for nulvektoren.
Sætning 6.12 bevises i 7.12.

Ofte vil man anvende formlen

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(u)$$

også i det tilfælde hvor mindst en af vektorerne er nul. I det tilfælde er vinklen u ikke defineret, men det er ligegyldigt hvilken værdi for vinklen man sætter ind, formlen bliver alligevel sand.

6.13 Bestem i hvert af de seks tilfælde nedenfor fortegnet for $\det(\vec{a},\vec{b})$ ud fra figuren.



Af sætning 6.10 fremgår at der gælder:

6.14 To egentlige vektorer er parallelle netop når deres determinant er nul.

Bemærk at vi ***ikke*** ud fra $\det(\vec{a},\vec{b}) = 0$ kan slutte at vektorerne er parallelle, det kan være at en af vektorerne er nulvektoren.

6.15 Vi vil bestemme de tal t for hvilke vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 4t \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

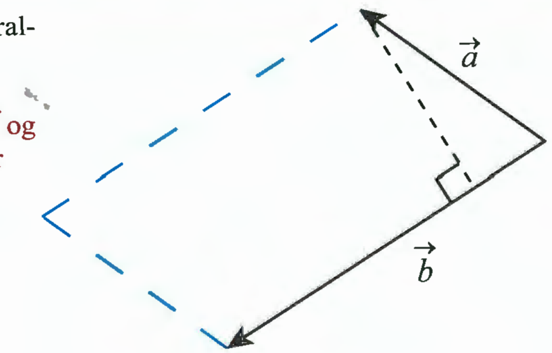
er parallelle.
Determinanten er $\det(\vec{a},\vec{b}) = 6t^2 - 12t = 6t \cdot (t-2)$
Ligningen $\det(\vec{a},\vec{b}) = 0$ har da løsningerne $t = 0 \vee t = 2$.

For $t = 0$ er $\vec{a} = \vec{o}$, så vektorerne er ikke parallelle for denne værdi af t. For $t = 2$ er $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, så vektorerne er egentlige, og af 6.14 får vi at vektorerne er parallelle for denne værdi af t.
Der er altså én værdi, $t = 2$, for hvilken vektorerne er parallelle.

6.16 Bestem i hvert tilfælde de tal t for hvilke vektorerne er parallelle.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2t \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4t \end{pmatrix}$
c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 6 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t+1 \end{pmatrix}$

To vektorer siges at udspænde et parallelogram, som vist på figuren.



6.17 Arealet A af det af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspændte parallelogram er

$$A = |\det(\vec{a},\vec{b})|$$

Denne sætning bevises i 7.13.

For to vektorer med koordinatsæt $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ kan vi skrive arealet A af det udspændte parallelogram ved hjælp af determinantsymbolet

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\|$$

Læg mærke til at her er de yderste lodrette streger det numeriske tegn, mens de inderste er determinantsymbolet.

6.18 Bestem i hvert tilfælde arealet af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspændte parallelogram.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-10\\-6\end{pmatrix}$ d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}11\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\-7\end{pmatrix}$

6.19 Bestem de værdier af tallet t for hvilke arealet af det udspændte parallelogram er 7.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}t+4\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\t\end{pmatrix}$

I cas-programmet TI InterActive! kan man ikke finde determinanten for et vektorpar direkte. Enten kan man bruge at man kan få tværvektoren (se 4.19 og 4.23) og så bruge skalarproduktet, eller man kan bruge determinanten for en matrix (se appendiks 7), hvor første og anden søjle er vektorerne. Vi ser eksempler på begge metoder.

6.20 Vektorerne defineres

$$\vec{a} := \begin{bmatrix}-1\\6\end{bmatrix} :: \vec{b} := \begin{bmatrix}5\\-11\end{bmatrix}$$

og så kan vi få beregnet determinanten

$$\hat{a} := \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\cdot\vec{a}$$

$$\text{dotP}(\hat{a}, \vec{b}) \quad \to -19.$$

Men som tidligere nævnt er det nok enklere at indtaste vektorernes koordinater direkte i en matrix:

$$\det\left(\begin{bmatrix}-1 & 5\\6 & -11\end{bmatrix}\right) \quad \to -19$$

6.21 Vi skal bestemme de tal t for hvilke vektorerne

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}t\\3\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

er parallelle. Vi løser ligningen:

$$\text{solve}\left(\det\left(\begin{bmatrix}t & 2\\3 & 5\end{bmatrix}\right)=0, t\right) \quad \to t=\frac{6}{5}$$

Vi ser at problemet er løst, for begge vektorer er egentlige.

Vektorerne er altså parallelle netop når $t=\frac{6}{5}$.

6.22 Vi skal finde de tal t for hvilke vektorerne

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}t^2\\4t\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

er parallelle. Vi løser ligningen:

$$\text{solve}\left(\det\left(\begin{bmatrix}t^2 & 3\\4\cdot t & 6\end{bmatrix}\right)=0, t\right) \quad \to t=2 \text{ or } t=0$$

Vi ser at for $t=2$ er vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$, så begge vektorer er egentlige.

Vi ser at for $t=0$ er vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, så vektorerne er ikke parallelle for denne værdi af t.

Vektorerne er altså parallelle netop når $t=2$.

6.23 For at finde de tal t for hvilke arealet af det af vektorerne

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}t\\7\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$$

udspændte parallelogram har arealet 5, løser vi således:

$$\text{solve}\left(\left|\det\left(\begin{bmatrix}t & 2\\7 & 10\end{bmatrix}\right)\right|=5, t\right) \quad \to t=\frac{19}{10} \text{ or } t=\frac{9}{10}$$

Arealet af det af vektorerne udspændte parallelogram er altså 5 netop når t har en af disse to værdier.

6.24 Bestem i hvert tilfælde mængden af tal t for hvilke vektorerne

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\t^2+2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\11\end{pmatrix}$ b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}t^2-1\\2t-2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$

er parallelle.

6.25 Bestem i hvert af tilfældene i 6.24 de tal t for hvilke det af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspændte parallelogram har arealet 8.

6.26 Bestem i hvert tilfælde mængden af tal t for hvilke vektorerne

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}t-12\\t-18\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\t-4\end{pmatrix}$ b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}3t-1\\2t\end{pmatrix}$

er parallelle.

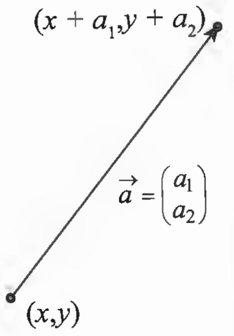
6.27 Bestem i hvert af tilfældene i 6.26 de tal t for hvilke det af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspændte parallelogram har arealet 17.

6.28 Bestem i hvert af tilfældene i 6.16 de tal t for hvilke det af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspændte parallelogram har arealet 38.

7. Nogle beviser om vektorer

7.1 Længden af en vektor er længden af en vilkårlig repræsentant for vektoren.

Bevis: Den repræsentant for vektoren
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$
der begynder i punktet (x,y), ender i $(x + a_1, y + a_2)$.
Afstanden fra (x,y) til $(x + a_1, y + a_2)$ er
$$\sqrt{(x+a_1-x)^2+(y+a_2-y)^2} = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$$
det var netop det vi gerne ville bevise.



Reglen for kvadratet for en toleddet størrelse med vektorer ser næsten ud som den vi kender med tal fra TRIP's matematiske GRUNDBOG:

7.2 For vilkårlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder:
$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Husk her at en vektor i anden er vektorens skalarprodukt med sig selv.

Bevis: Vi betragter to vilkårlige vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Så regner vi henholdsvis venstre og højre side ud:
$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = |\vec{a}+\vec{b}|^2 = (a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2$$
$$= a_1^2 + b_1^2 + 2\cdot a_1\cdot b_1 + a_2^2 + b_2^2 + 2\cdot a_2\cdot b_2$$
$$\vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2\cdot(a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2)$$
Ved direkte sammenligning kan vi se at de to udtryk er ens. Hermed er sætningen bevist.

7.3 Giv et alternativt bevis for sætning 7.2 hvor du bruger 4.4.

Normalt holder vi i vore udregninger i et bestemt koordinatsystem. Men i det følgende får vi brug for at kunne udskifte koordinatsystemet så nogle vektorer ligger hensigtsmæssigt. Der gælder følgende, umiddelbart lidt forbavsende, sætning:

7.4 Skalarproduktet mellem to vektorer er det samme i alle koordinatsystemer med samme længdeenhed.

Grunden til at denne sætning er lidt forbavsende, er at når vi ændrer koordinatsystemet, ændrer vi begge vektorers koordinater.

Bevis for 7.4: Vi betragter to vilkårlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Fra 4.4 d) og 7.2 ved vi at
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$
I dette udtryk kan vi da isolere $\vec{a}\cdot\vec{b}$, og vi får (husk at tjekke!)
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\cdot(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$$
Her er skalarproduktet udtrykt udelukkende ved længder. Derfor er skalarproduktet det samme i alle koordinatsystemer med samme længdeenhed. Hermed er sætningen bevist.

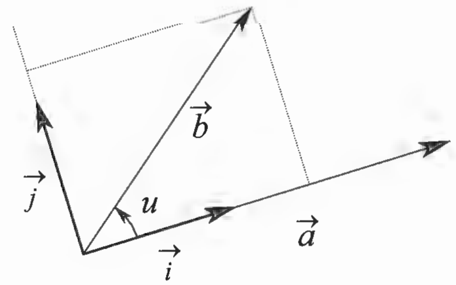
Undervejs i beviset fik vi bevist at det for vilkårlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder at:

7.5
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\cdot(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$$

Vi vil nu bevise en sætning der hjælper os et godt stykke af vejen til beviset for 4.8.

7.6 Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer, og lad u betegne vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$. Da gælder
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(u)$$

Bevis: Vi indlægger et koordinatsystem, hvor førsteaksen er ensrettet med $\vec{a}$. Så er første basisvektor $\vec{i} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, og anden basisvektor bliver da $\vec{j} = \hat{\vec{i}}$. I dette koordinatsystem har $\vec{a}$ og $\vec{b}$ koordinatsættene



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} |\vec{b}|\cdot\cos(u) \\ |\vec{b}|\cdot\sin(u) \end{pmatrix}$$
Derfor er skalarproduktet
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(u) + 0\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(u) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(u)$$
Hermed er sætning 7.6 bevist.

Men det var jo ikke 4.8, for i 7.6 står "fra .. til .." og ikke "mellem". Så vi mangler at gøre beviset for 4.8 færdigt.

7.7 Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer, og lad v betegne vinklen mellem vektorerne. Da gælder
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(v)$$

Bevis: Da $\cos(v) = \cos(-v)$ for enhver vinkel v, følger sætningen umiddelbart af sætning 7.6 da vinklen "mellem" og "fra … til …" enten er ens, eller også de er "lige store", men har modsatte fortegn (eller de afviger med et helt multiplum af 360°).

7.8 Tværvektoren $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix}-a_2\\ a_1\end{pmatrix}$ har samme længde som $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$

Tværvektoren til en egentlig vektor fremkommer ved at dreje vektoren 90° i positiv omløbsretning.

Bevis: At de to vektorer har samme længde følger direkte ved udregning:

$$|\hat{\vec{a}}| = \sqrt{(-a_2)^2 + a_1^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\vec{a}|$$

Vi skriver nu vektor $\vec{a}$ på formen

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \begin{pmatrix}\cos(v)\\ \sin(v)\end{pmatrix}$$

hvor v er en retningsvinkel for vektor $\vec{a}$.
Hvis vi drejer denne vektor 90° i positiv omløbsretning, får vi vektoren

$$|\vec{a}| \cdot \begin{pmatrix}\cos(v+90°)\\ \sin(v+90°)\end{pmatrix}$$

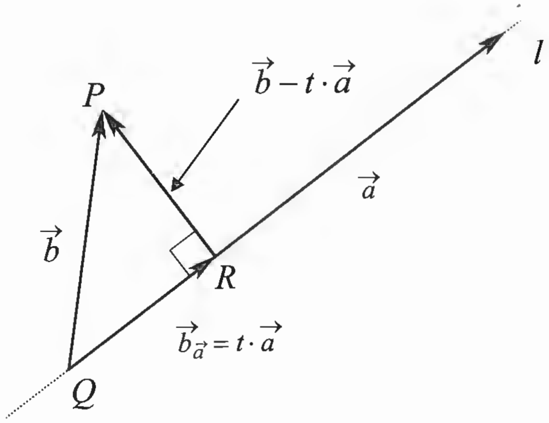
Af 1.8 og 1.9 følger at dette er det samme som

$$|\vec{a}| \cdot \begin{pmatrix}-\sin(v)\\ \cos(v)\end{pmatrix}$$

Denne vektors førstekoordinat er netop minus andenkoordinaten til $\vec{a}$, og andenkoordinaten er $\vec{a}$'s førstekoordinat. Det gælder altså at hvis vi drejer en vektor 90° i positiv omløbsretning, får vi netop tværvektoren.
Hermed er sætningen bevist.

7.9 Lad $\vec{b}$ være en vektor og lad $\vec{a}$ være en egentlig vektor. Da er projektionen af vektor $\vec{b}$ på vektor $\vec{a}$ givet ved:

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}$$



Bevis: Vi vælger repræsentanter med samme begyndelsespunkt, Q, for de to vektorer. Ved projektionen projiceres da vektor $\vec{b}$ i vektor $\overrightarrow{QR}$.

Men $\overrightarrow{QR}$ er parallel med $\vec{a}$ (eller $\overrightarrow{QR}$ er nulvektoren), derfor findes et tal t så
$$\overrightarrow{QR} = t\cdot\vec{a}.$$

Vi får ved brug af indskudsreglen at
$$\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QP}$$

Derfor kan $\overrightarrow{RP}$ skrives
$$\overrightarrow{RP} = \vec{b} - t\cdot\vec{a}$$

Men så må

7.10 $$\vec{a}\cdot(\vec{b} - t\cdot\vec{a}) = 0$$

da $\overrightarrow{RP}$ er vinkelret på $\vec{a}$, eller $\overrightarrow{RP}$ er nulvektoren.
Af 7.10 får vi
$$\vec{a}\cdot\vec{b} - t\cdot\vec{a}^2 = 0$$

Da $\vec{a}$ er en egentlig vektor, kan vi isolere t af denne ligning:
$$t = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$$

Denne værdi indsætter vi så i $\vec{b}_{\vec{a}} = \overrightarrow{QR} = t\cdot\vec{a}$.
Hermed er beviset slut.

Der gælder følgende sætning, der minder meget om den tilsvarende for skalarproduktet 7.4:

7.11 Determinanten mellem to vektorer er det samme i alle koordinatsystemer med samme længdeenhed og samme omløbsretning.

Bevis: Vi ved fra 6.4 at
$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \hat{\vec{a}}\cdot\vec{b}$$

Vi ved også at skalarproduktet er uafhængigt af koordinatsystemet. Men da tværvektoren fremkommer ved at dreje vektoren 90° i positiv omløbsretning, er tværvektoren også uafhængigt af koordinatsystemet, så længe omløbsretningen er uforandret.

Derfor ser vi at $\hat{\vec{a}}\cdot\vec{b}$, og dermed er $\det(\vec{a},\vec{b})$ uafhængig af koordinatsystemet blot længdeenheden og omløbsretningen er uforandret.