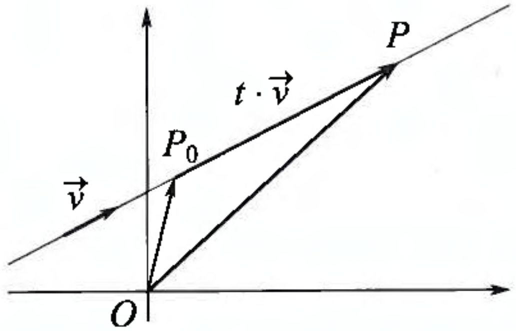
8. Linjens parameterfremstilling

Vi har tidligere beskrevet linjer ved hjælp af deres ligninger. Vi vil nu se en anden måde hvor vi udnytter vektorer til beskrivelse af punkterne på en linje.

Vi ser på den linje der går gennem et fast punkt P_0, og som er parallel med en given egentlig vektor $\vec{v}$.
Da er et punkt P på linjen karakteriseret ved at stedvektoren $\overrightarrow{OP}$ kan skrives som stedvektoren $\overrightarrow{OP_0}$ for det faste punkt P_0 plus en vektor $\overrightarrow{P_0P}$ der er parallel med vektor $\vec{v}$ eller er nulvektoren.



Vi får derfor

8.1 $$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{v}$$

hvor t er et tal.
Vi kan se at når $t = 0$ ligger punktet P i P_0.
Når t gennemløber de reelle tal vil vi få ethvert punkt på linjen frem.

Formlen i 8.1 vil vi skrive med koordinater. Hvis P_0 har koordinatsæt (x_0,y_0), $\vec{v}$ har koordinatsæt $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ og P har koordinatsæt (x,y), får vi:

8.2 $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \text{, hvor } t \in \mathrm{R}$$

Vi kalder dette udtryk for en *parameterfremstilling for linjen gennem (x_0,y_0) med retningsvektor* $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$. Retningsvektoren må ikke være nulvektoren.

8.3 Figuren viser linjen l med parameterfremstilling

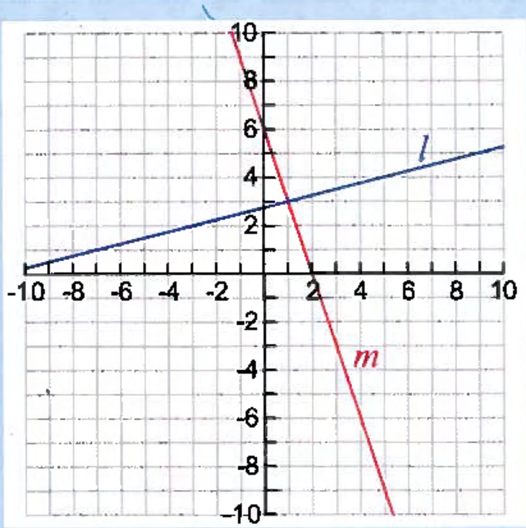
$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor $t \in \mathrm{R}$

og linjen m med parameterfremstilling

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

hvor $s \in \mathrm{R}$



Ud fra den sædvanlige form af ligningen for en linje l:

$$l: y = a \cdot x + b$$

kan vi uden problemer lave en parameterfremstilling for linjen. Vi ved at punktet med koordinatsæt $(0,b)$ ligger på linjen, og vi ved at når vi øger x med 1 vokser y med a (a kan eventuelt være negativ). Derfor er vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ en retningsvektor for linjen.
En parameterfremstilling er derfor:

8.4 $$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \text{, } t \in \mathrm{R}$$

For to linjer der er givet ved deres parameterfremstillinger, kan vi finde en vinkel mellem linjerne ved at finde vinklen mellem retuingsvektorerne.

8.5 Vi kan finde en vinkel mellem de to linjer l og m i 8.3 på følgende måde:

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} :: \vec{b} := \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$v := \arccos\left(\frac{\mathrm{dotP}(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right) \rightarrow 85.60$$

Den spidse vinkel mellem de to linjer er derfor 85,60°, og den stumpe vinkel er er derfor 180° − 85,60° = 94,40°.

8.6 Bestem en parameterfremstilling for linjen gennem punktet (− 8,7) med retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

8.7 Bestem en parameterfremstilling for linjen gennem punktet (4,9) med retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

8.8 Bestem en parameterfremstilling for linjen med ligning $y = 3 \cdot x - 8$.

8.9 Bestem en parameterfremstilling for linjen med ligning $y = -2 \cdot x + 6$.

8.10 Bestem såvel den stumpe som den spidse vinkel mellem linjerne med parameterfremstillingerne

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \end{pmatrix}, \ t \in \mathrm{R} \ \text{ og } \ m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, s \in \mathrm{R}$$

8.11 Bestem såvel den stumpe som den spidse vinkel mellem linjerne med parameterfremstillingerne

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathrm{R} \ \text{ og } \ m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}, s \in \mathrm{R}$$

Vi kan finde skæringspunktet mellem to linjer givet ved deres parameterfremstillinger ved at sætte de to udtryk for henholdsvis x og y lig med hinanden og løse lingerne med hensyn til de to parametre. Dernæst indsættes den ene af de to parametre i dens parameterfremstilling. Det bliver forhåbentlig meget klarere når vi ser et eksempel:

8.12 For at finde skæringspunktet mellem de to linjer i 8.3 sætter vi de to udtryk for henholdsvis x og y lig med hinanden:

$$5+4\cdot t=4+1\cdot s$$
$$4+1\cdot t=-6-3\cdot s$$

Disse to ligninger løses så ved håndkraft eller med maskinhjælp, løsningen er $t=-1$ og $s=-3$.
Skæringspunktets stedvektor fås da ved at indsætte $t=-1$ i parameterfremstillingen for l (eller $s=-3$ i parameterfremstillingen for m).
Skæringspunktet har da koordinatsæt (1,3). (Det er ikke dybt forbavsende når man har set figuren på side 46).

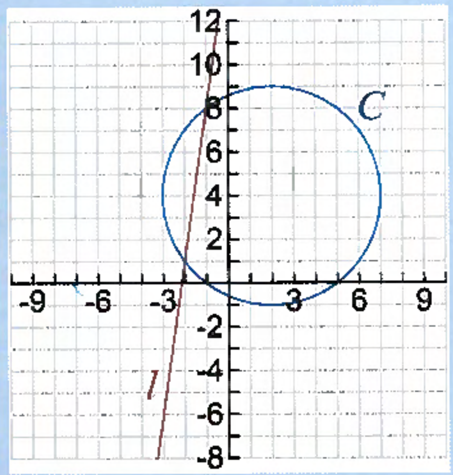
Vi kan finde eventuelle skæringspunkter mellem en cirkel givet ved en ligning og en linje givet ved en parameterfremstilling ved at indsætte x og y fra linjens parameterfremstilling i cirklens ligning, og derefter findes parameterværdier til eventuelle skæringspunkter ved at løse den fremkomne ligning. Igen bliver det forhåbentlig meget klarere når vi ser et eksempel:

8.13 Vi ser på cirklen C med ligning

$$(x-2)^2+(y-4)^2=25$$

og linjen l med parameterfremstilling

$$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix},\ t\in \mathrm{R}$$



I eventuelle skæringspunkter passer koordinaterne (x,y) i begge udtryk,. Vi finder derfor x og y af parameterfremstillingen for linjen og indsætter i cirkelligningen

$$((-3+t)-2)^2+((-6+7t)-4)^2=25$$

Denne andengradsligning løser vi og finder løsningerne (husk at tjekke)

$$t=1 \text{ eller } t=2$$

Ved indsættelse af disse værdier i linjens parameterfremstilling finder vi at skæringspunkterne er (−2,1) og (−1,8).
I TI InterActive! finder vi løsningerne således:

$\text{solve}\left((x-2)^2+(y-4)^2=25 \text{ and } x=-3+t \text{ and } y=-6+7\cdot t, \{x,y,t\}\right)$

$\to t=2 \text{ and } x=-1 \text{ and } y=8 \text{ or } t=1 \text{ and } x=-2 \text{ and } y=1$

Det er altid rart at se at programmet giver det resultat vi forventede.

8.14 a) Hvordan kan vi se på to linjers parameterfremstillinger at linjerne er parallelle?

b) Hvordan kan vi se på to linjers parameterfremstillinger at linjerne er sammenfaldende?

c) Hvordan kan vi se på to linjers parameterfremstillinger at linjerne er ortogonale?

8.15 a) Hvordan viser det sig i udregningen hvis vi forsøger at finde skæringspunkter mellem to parallelle, ikke sammenfaldende linjer givet ved deres parameterfremstillinger?

b) Hvordan viser det sig i udregningen hvis vi forsøger at finde skæringspunkter mellem to sammenfaldende linjer givet ved deres parameterfremstillinger?

8.16 Bestem eventuelle skæringspunkter mellem linjerne med parameterfremstillinger:

$$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -8 \\ 13 \end{pmatrix},\ t\in \mathrm{R} \text{ og } m:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix},\ s\in \mathrm{R}$$

8.17 Bestem eventuelle skæringspunkter mellem linjerne med parameterfremstillinger:

$$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix},\ t\in \mathrm{R} \text{ og } m:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix},\ s\in \mathrm{R}$$

8.18 Bestem eventuelle skæringspunkter mellem linjen med parameterfremstilling

$$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix},\ t\in \mathrm{R}$$

og cirklen med ligning

$$(x-6)^2+(y+2)^2=42$$

8.19 Bestem eventuelle skæringspunkter mellem linjen med parameterfremstilling

$$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t\in \mathrm{R}$$

og cirklen med ligning

$$(x-4)^2+(y+1)^2=45$$

8.20 a) Bestem eventuelle skæringspunkter mellem linjen l i 8.19 og cirklen med ligning

$$(x-4)^2+(y+1)^2=47$$

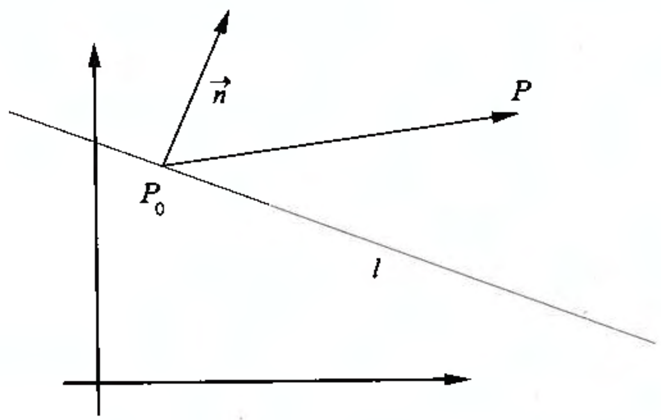
b) Bestem eventuelle skæringspunkter mellem cirklen i a) og koordinatakserne.

8.21 a) Bestem eventuelle skæringspunkter mellem linjen l i 8.19 og cirklen med ligning

$$(x-4)^2+(y+1)^2=36$$

b) Bestem eventuelle skæringspunkter mellem cirklen i a) og koordinatakserne.

9. Linjens ligninger

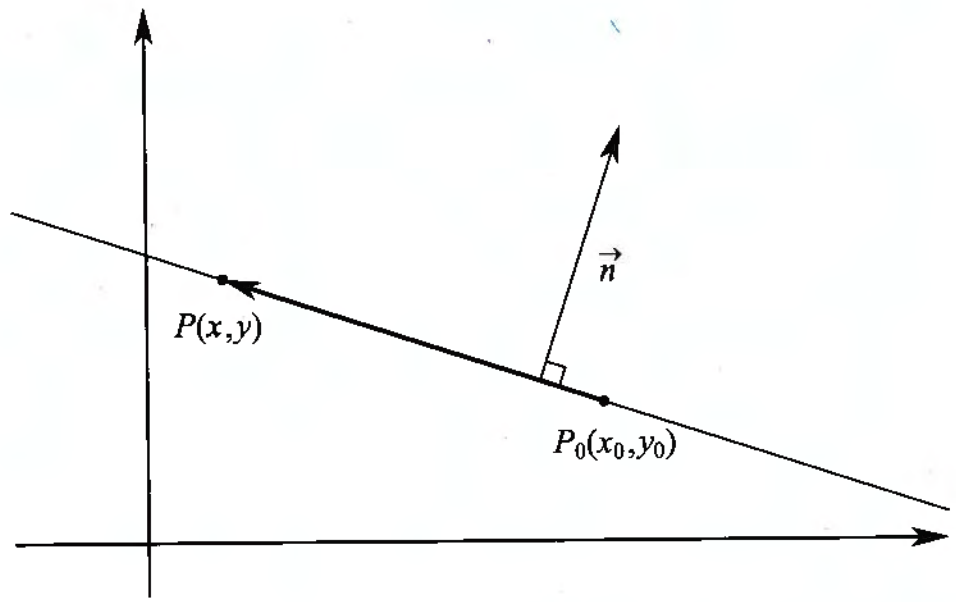


Betragt en egentlig vektor $\vec{n}$, et fast punkt P_0 og et punkt P som vi vil lade variere.

9.1 Vi kan nu se at skalarproduktet
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P}$ er positivt hvis vinklen mellem $\overrightarrow{P_0P}$ og $\vec{n}$ er under 90°.
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P}$ er negativt hvis vinklen mellem $\overrightarrow{P_0P}$ og $\vec{n}$ er over 90°.
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P}$ er nul hvis vinklen mellem $\overrightarrow{P_0P}$ og $\vec{n}$ er lig med 90°, eller hvis $\overrightarrow{P_0P}$ er nulvektoren.

Det betyder at punktet P ligger på den linje l der går gennem P_0, og som er vinkelret på $\vec{n}$ netop når skalarproduktet $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P}$ er lig med nul.

På denne måde har vi fået karakteriseret punkterne på en linje. Vektoren $\vec{n}$ kaldes en *normalvektor til linjen l*.



Vi vil nu skrive skalarproduktet $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P}$ ud i koordinater. Som sædvanlig kalder vi koordinatsættet til P_0 for (x_0,y_0) og koordinatsættet til P for (x,y).

Normalvektoren har koordinatsæt $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Vi får da

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)=0$$

$$\Leftrightarrow a\cdot x+b\cdot y-(a\cdot x_0+b\cdot y_0)=0 \Leftrightarrow a\cdot x+b\cdot y+c=0$$

hvor vi ved den sidste dobbeltpil har indført betegnelsen

$$c = -(a\cdot x_0+b\cdot y_0)$$

Men hvad betyder nu disse udregninger?

Vi kan se at hvis vi har en linje med normalvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ som går gennem punktet (x_0,y_0), da er

$$a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)=0$$

en ligning for linjen.

Vi kan også se at hvis vi har en linje med normalvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, så kan dens ligning skrives på formen

$$a\cdot x+b\cdot y+c=0$$

Der gælder følgende sætning

9.2 Linjerne i planen er netop de punktmængder der har ligninger på formen

$$a\cdot x+b\cdot y+c=0$$

hvor a, b og c er faste tal med $(a,b)\neq(0,0)$.

Fordelen ved at bruge denne form af linjens ligning i stedet for $y = a\cdot x + b$ er at vi nu får alle linjer med, også de lodrette!

En del af sætning 9.2 er bevist ovenfor idet vi har bevist at en linje har en ligning af den form. At enhver ligning af den form er en ligning for en linje bevises i 11.1.

9.3 Bestem en ligning for linjen der går gennem punktet med koordinatsæt (3,8), og som har normalvektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

9.4 Bestem en ligning for linjen der går gennem punktet med koordinatsæt (1,− 4), og som har normalvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

9.5 Bestem en ligning for den linje som har retningsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$, og som går gennem punktet med koordinatsæt (5,−11).

9.6 Bestem en ligning for den linje som har retningsvektor $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$, og som går gennem punktet med koordinatsæt (4,8).

Vi kan ud fra en ligning for en linje let finde en parameterfremstilling.

9.7 Hvis ligningen er

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

da er en normalvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, så vi kan finde en retningsvektor ved at tage tværvektoren, den er da $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Så mangler vi bare et punkt. Hvis $a \neq 0$, kan vi bruge punktet $(-\frac{c}{a}, 0)$, ellers må $b \neq 0$, og vi kan bruge punktet $(0, -\frac{c}{b})$.

Under alle omstændigheder kan vi finde såvel normalvektor som et punkt på linjen, og derfor kan vi opskrive parameterfremstillingen.

9.8 Vi kan også gå den anden vej. Hvis vi kender parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

kan vi finde en ligning for linjen.
Af parameterfremstillingen kan vi aflæse et punkt, nemlig (x_0, y_0), og retningsvektoren $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$. En normalvektor til linjen er derfor tværvektoren til denne, altså $\begin{pmatrix} -k \\ h \end{pmatrix}$.

Linjens ligning er derfor

$$-k \cdot (x - x_0) + h \cdot (y - y_0) = 0$$

9.9 Vi ser at linjen l med ligning

$$3x - 5y - 12 = 0$$

har normalvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$. En retningsvektor er derfor $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Et punkt på linjen er $\left(-\frac{-12}{3}, 0\right) = (4,0)$. En parameterfremstilling for linjen er derfor

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}$$

9.10 Linjen l med parameterfremstilling

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}$$

har retningsvektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$. En normalvektor er derfor $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Vi ser at punktet med koordinatsæt (2,7) ligger på linjen. En ligning for linjen er derfor

$$-3 \cdot (x - 2) + (-4) \cdot (y - 7) = 0$$

Denne ligning kan vi omskrive til

$$3x + 4y - 34 = 0$$

Hermed har vi fundet en ligning for l.

9.11 Linjen l har ligning

$$8x + 2y - 34 = 0$$

Bestem en parameterfremstilling for linjen.

9.12 Linjen l har ligning

$$3x - 5y + 21 = 0$$

Bestem to forskellige parameterfremstillinger for linjen.

9.13 Linjen l har parameterfremstilling

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}$$

Bestem en ligning for linjen.

9.14 Linjen l har parameterfremstilling

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}$$

Bestem to forskellige ligninger for linjen.

9.15 Om en linje l der går gennem punktet med koordinatsæt (6,−2), oplyses at linjen er parallel med linjen m med parameterfremstilling

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}$$

Bestem en ligning for linjen l.

9.16 Om en linje m der går gennem punktet med koordinatsæt (4,9) oplyses at linjen står vinkelret på linjen l med parameterfremstilling

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -117 \\ 4711 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}$$

Bestem en ligning for linjen m.

9.17 Linjerne l og m er ortogonale. Punktet med koordinatsæt (6,7) ligger på linjen m. Linjen l har parameterfremstilling

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}$$

Bestem en ligning for linjen m og skæringspunktet for linjen l med andenaksen.

9.18 Linjen l går gennem punktet med koordinatsæt (5,−7) og er parallel med linjen m med ligning m: $9x + 4y - 6 = 0$. Bestem en ligning for linjen l.

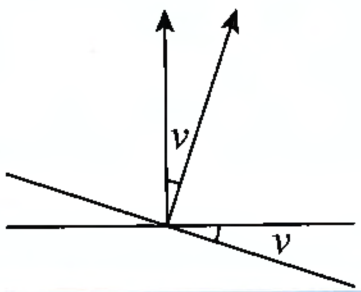
9.19 Linjen l går gennem punktet med koordinatsæt (−3,6) og står vinkelret på linjen m med ligning m: $5x - 3y + 30 = 0$. Bestem en ligning for linjen l.

9.20 Linjen l går gennem punktet med koordinatsæt (2,7) og står vinkelret på linjen m med ligning m: $4x + 14y + 12 = 0$. Bestem en ligning for linjen l.

Hvis to linjer er givet ved ligninger af formen

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$$
$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$$

kan vi finde vinklen v mellem normalvektorerne $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Men da begge normalvektorer står vinkelret på de tilhørende linjer, er vinklen v også en af vinklerne mellem linjerne.



9.21 Linjerne l og m har ligninger

$$l\colon 5\,x + 8\,y - 25 = 0 \quad \text{og} \quad m\colon 4\,x - 7\,y + 18 = 0$$

Vi lader da cas-programmet finde vinklen mellem normalvektorerne

$$v := \arccos\left(\frac{\operatorname{dotp}\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} \right)}{\left\| \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} \right\|} \right) \quad \rightarrow 118.25$$

Den stumpe vinkel mellem linjerne er derfor 118,25°,
og den spidse vinkel mellem linjerne bliver 180° − 118,25° = 61,75°.

Vi ser nu på to linjer der givet ved ligninger af formen

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0 \quad \text{og} \quad a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$$

Vi kan her let tjekke om linjerne er eller ikke er parallelle ved at udregne determinanten mellem normalvektorerne $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Hvis determinanten er forskellig fra nul, er linjerne ikke parallelle, og der er netop et skæringspunkt. Hvis determinanten er lig med nul, er linjerne parallelle, og så er linjerne enten sammenfaldende og har alle punkter fælles, eller de er parallelle og forskellige, og så er der intet fælles punkt.
For at vi kan finde eventuelle skæringspunkter mellem linjerne, må vi løse lignings-systemet. Det gøres let med maskinhjælp. Uden maskinhjælp er en metode at isolere y (eller x) i begge ligninger og derefter sætte de to udtryk for y (eller x) lig hinanden og til sidst finde x (eller y). Den manglende variabel findes efter indsættelse af den fundne x (eller y) i en af de oprindelige ligninger. Det bliver vist først forståeligt efter et eksempel.

9.22 Linjerne l og m har ligninger

$$l\colon -4\,x + 7\,y = 51 \quad \text{og} \quad m\colon 3\,x + 2\,y + 2 = 0$$

Vi ser at linjerne ikke er parallelle da deres normalvektorer ikke er proportionale. Normalt vil vi isolere y af begge ligninger, og så er fremgangsmåden som den vi har prøvet mange gange før. For at slippe for brøker vælger vi her at isolere $14\,y$ af begge ligninger:

$$l\colon 14\,y = 8\,x + 102 \quad \text{og} \quad m\colon 14\,y = -21\,x - 14$$

Vi finder da x-koordinaten til skæringspunktet:

$$8\,x + 102 = -21\,x - 14 \Leftrightarrow 29\,x = -116 \Leftrightarrow x = -4$$

og y-koordinaten kan bestemmes således

$$3 \cdot (-4) + 2\,y + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\,y - 10 = 0 \Leftrightarrow y = 5$$

Skæringspunktet har derfor koordinatsæt $(-4{,}5)$.

9.23 Vi vil finde eventuelle skæringspunkter mellem linjen med parameterfremstilling

$$l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

og linjen med ligning

$$m\colon 5\,x + 4\,y - 59 = 0$$

Vi indsætter da udtrykkene for x og y i parameterfremstillingen i linjens ligning:

$$5 \cdot (2 + 3t) + 4\,(7 - 2t) - 59 = 0 \Leftrightarrow 10 + 15t + 28 - 8t - 59 = 0 \Leftrightarrow 7t = 21 \Leftrightarrow t = 3$$

Heraf ser vi (hvordan?) at der er et skæringspunkt, og vi finder skæringspunktets koordinatsæt ved indsættelse af $t = 3$ i parameterfremstillingen for l:

$$(x{,}y) = (2 + 3 \cdot 3{,}7 + 3 \cdot (-2)) = (11{,}1)$$

9.24 Betragt linjerne l og m med ligninger

$$l\colon -x + 3\,y - 17 = 0 \quad \text{og} \quad m\colon 4\,x - 2\,y - 2 = 0$$

a) Bestem eventuelle skæringspunkter mellem linjerne.
b) Bestem både den spidse og den stumpe vinkel mellem linjerne.

9.25 Betragt linjerne l og m med ligninger

$$l\colon 7\,x + 2\,y + 51 = 0 \quad \text{og} \quad m\colon 3\,x - 4\,y - 17 = 0$$

a) Bestem eventuelle skæringspunkter mellem linjerne.
b) Bestem både den spidse og den stumpe vinkel mellem linjerne.

9.26 Betragt linjerne l og m med ligninger

$$l\colon 6\,x + 2\,y - 7 = 0 \quad \text{og} \quad m\colon 3\,x - 4\,y - 6 = 0$$

a) Bestem eventuelle skæringspunkter mellem linjerne.
b) Bestem både den spidse og den stumpe vinkel mellem linjerne.

9.27 Betragt linjen l med parameterfremstilling

$$l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

og linjen m med ligning

$$m\colon 7\,x + 2\,y - 11 = 0$$

a) Bestem eventuelle skæringspunkter mellem linjerne.
b) Bestem både den spidse og den stumpe vinkel mellem linjerne.

9.28 Betragt linjen l med parameterfremstilling

$$l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

og linjen m med ligning

$$m\colon 3\,x - 8\,y + 18 = 0$$

a) Bestem eventuelle skæringspunkter mellem linjerne.
b) Bestem både den spidse og den stumpe vinkel mellem linjerne.

Vi ved fra TRIP's matematiske GRUNDBOG at afstanden fra punktet $P(x_1,y_1)$ til linjen l med ligning $y = p \cdot x + q$ er

9.29 $$\mathrm{dist}(P,l) = \frac{|p \cdot x_1 + q - y_1|}{\sqrt{p^2+1}}$$

Når linjens ligning er givet på formen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, kan vi bruge den følgende sætning:

9.30 Afstanden $\mathrm{dist}(P,l)$ fra punktet $P(x_1,y_1)$ til linjen l med ligning $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ er

$$\mathrm{dist}(P,l) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Beviset for sætning 9.30 finder du i 11.2.

9.31 Bestem afstanden mellem punktet med koordinatsæt (12,−3) og linjen med ligning

$$-6x + 8y - 1 = 0$$

9.32 Bestem afstanden mellem punktet med koordinatsæt (5,8) og linjen med ligning

$$2x - 4y + 6 = 0$$

9.33 Bestem afstanden mellem punktet med koordinatsæt (6,−4) og linjen med ligning

$$5x + 7y = 2$$

9.34 Bestem afstanden mellem punktet med koordinatsæt (7,−9) og linjen l med parameterfremstilling

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \; t \in \mathrm{R}$$

9.35 Bestem den eksakte afstand mellem punktet med koordinatsæt (−5,7) og linjen l med parameterfremstilling

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathrm{R}$$

9.36 Gør rede for at linjerne l og m med ligninger

$$l: -4x + 3y - 5 = 0 \quad \text{og} \quad m: 8x - 6y + 7 = 0$$

er parallelle. Bestem desuden afstanden mellem linjerne.

9.37 Gør rede for at linjerne l og m med ligninger

$$l: 2x - 5y - 1 = 0 \quad \text{og} \quad m: -6x + 15y + 3 = 0$$

er parallelle. Bestem desuden afstanden mellem linjerne.

9.38 Gør rede for at linjerne l og m med ligninger

$$l: -5x + 12y - 3 = 0 \quad \text{og} \quad m: 10x - 24y = 9$$

er parallelle. Bestem desuden afstanden mellem linjerne.

9.39 Gør rede for at linjerne l og m med parameterfremstillinger

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \; t \in \mathrm{R} \;\text{ og }\; m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \end{pmatrix}, \; s \in \mathrm{R}$$

er parallelle. Bestem desuden afstanden mellem linjerne.

9.40 Gør rede for at linjerne l og m med parameterfremstillinger

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \end{pmatrix}, \; t \in \mathrm{R} \;\text{ og }\; m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \; s \in \mathrm{R}$$

er parallelle. Bestem desuden afstanden mellem linjerne.

9.41 Bestem skæringspunktet P mellem linjerne l og m med parameterfremstillinger

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \; t \in \mathrm{R} \;\text{ og }\; m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \; s \in \mathrm{R}$$

Bestem desuden afstanden fra P til linjen n med ligning

$$n: -4x - 3y + 17 = 0$$

9.42 Betragt linjen l med ligning $l: 2x - 5y + 20 = 0$ og punktet A med koordinatsæt (3,5).
a) Bestem koordinatsættet til det punkt P på linjen hvor $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OP}$.
b) Bestem arealet af trekant OAP.
c) Bestem projektionen Q af punktet A på linjen l.

9.43 Betragt linjen l med ligning $l: -3x + 2y + 6 = 0$ og punktet A med koordinatsæt (6,8).
a) Bestem koordinatsættet til det punkt P på linjen, hvor $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OP}$.
b) Bestem arealet af trekant OAP.
c) Bestem projektionen Q af punktet A på linjen l.

9.44 Betragt linjen l med ligning $l: -3x + 4y - 13 = 0$ og punkterne $A(-3,1)$ og $B(8,3)$.
a) Gør rede for at punktet A ligger på linjen l.
b) Lad C være projektionen af B på linjen l. Bestem arealet af trekant ABC.
c) Der findes et andet punkt D på linjen l hvor arealet af trekant ABD er det det samme som arealet af trekant ABC. Bestem koordinatsættet til punktet D.

9.45 Betragt linjen l med ligning $l: 4x - 3y + 14 = 0$ og punktet A med koordinatsæt (1,6).
a) Gør rede for at punktet A ligger på linjen l.
b) Bestem koordinatsættene til de to punkter P på linjen l for hvilke arealet af trekant OAP er 7.

11. Nogle beviser om linjer

Det vi mangler at bevise af sætning 9.2 er følgende:

11.1 Enhver ligning af formen
$$a\cdot x+b\cdot y+c=0 \quad \text{hvor } (a,b)\neq(0,0)$$
er en ligning for en linje.

Bevis: I første omgang antager vi at $a\neq 0$. Da kan vi omskrive på følgende måde
$$a\cdot x+b\cdot y+c=0 \Leftrightarrow a\cdot\left(x-\left(-\frac{c}{a}\right)\right)+b\cdot(y-0)=0$$
Vi ser heraf at dette er ligningen for en linje gennem punktet med koordinatsæt

$\left(-\frac{c}{a},0\right)$ og normalvektor $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Hvis det er b der ikke er nul, kan vi gøre noget tilsvarende
$$a\cdot x+b\cdot y+c=0 \Leftrightarrow a\cdot(x-0)+b\cdot\left(y-\left(-\frac{c}{b}\right)\right)=0$$
Vi ser heraf at dette er ligningen for en linje gennem punktet med koordinatsæt

$\left(0,-\frac{c}{b}\right)$ og normalvektor $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Hermed er beviset for 11.1 slut.

Vi vil nu bevise sætning 9.30. Der er to alternative beviser som er meget forskellige.

11.2 Afstanden dist(P,l) fra punktet $P(x_1,y_1)$ til linjen l med ligning $a\cdot x+b\cdot y+c=0$ er
$$\text{dist}(P,l)=\frac{|a\cdot x_1+b\cdot y_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

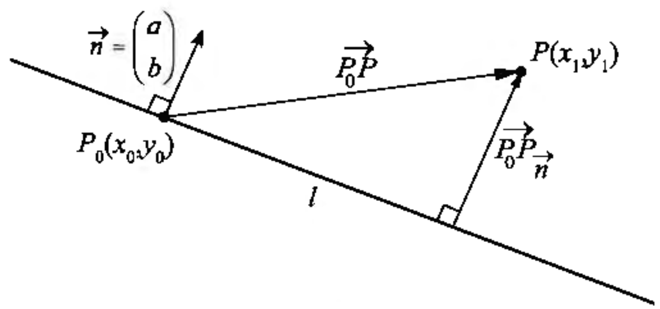
Bevis nr. 1: Vi ser først på det tilfælde bvor $b\neq 0$. Vi kan da omskrive linjens ligning på følgende måde:
$$a\cdot x+b\cdot y+c=0 \Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}\cdot x-\frac{c}{b}$$
Ved brug af 9.29 finder vi da
$$\text{dist}(P,l)=\frac{\left|\left(-\frac{a}{b}\right)\cdot x_1+\left(-\frac{c}{b}\right)-y_1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)^2+1}}=\frac{\left|\frac{a}{b}\cdot x_1+\frac{c}{b}+y_1\right|}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}}=\frac{|b|\cdot\left|\frac{a}{b}\cdot x_1+\frac{c}{b}+y_1\right|}{|b|\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}}=$$
$$\frac{|a\cdot x_1+c+b\cdot y_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Hermed er sætningen bevist i det tilfælde bvor $b\neq 0$.

Hvis $b=0$, da er ligningen for linjen
$$a\cdot x+c=0$$
Da $(a,b)\neq(0,0)$, ved vi så at $a\neq 0$. Linjen er derfor den lodrette linje med ligning
$$x=-\frac{c}{a}$$
Afstanden fra punktet (x_1,y_1) til denne linje er
$$\text{dist}(P,l)=\left|x_1-\left(-\frac{c}{a}\right)\right|=\left|x_1+\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{a\cdot x_1+c}{a}\right|=\frac{|a\cdot x_1+c|}{|a|}$$
Hvis vi sætter $b=0$ i formlen i 11.2, får vi
$$\frac{|a\cdot x_1+b\cdot y_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a\cdot x_1+c|}{\sqrt{a^2}}=\frac{|a\cdot x_1+c|}{|a|}$$
Hermed er det bevist at også i dette tilfælde giver formlen 11.2 det rigtige, og hermed er bevis nr. 1 for sætningen slut.

Vi vil nu se på et alternativt bevis for 9.30, bvor vi bruger vektorregning og starter fra bunden.

Bevis nr. 2: Lad P_0 være et punkt på linjen.



Afstanden fra punktet P til linjen l er den vinkelrette afstand, derfor må afstanden være længden af projektionen af vektor $\overrightarrow{P_0P}$ på linjens normalvektor $\vec{n}$.

11.3 $$\text{dist}(P,l)=\left|\overrightarrow{P_0P}_{\vec n}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec n}{|\vec n|^2}\cdot\vec n\right|=\frac{|\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec n|}{|\vec n|^2}\cdot|\vec n|=\frac{|\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec n|}{|\vec n|}$$

Her er
$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec n=\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=a\cdot(x_1-x_0)+b\cdot(y_1-y_0)=a\cdot x_1+b\cdot y_1-a\cdot x_0-b\cdot y_0$$
Da punktet P_0 ligger på linjen l er $a\cdot x_0+b\cdot y_0+c=0$. Derfor får vi
$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec n=a\cdot x_1+b\cdot y_1+c$$

Vi indsætter dette og udtrykket for længden af normalvektoren i 11.3 får da den ønskede formel. Hermed er bevis nr. 2 for sætningen slut.