

# Den retningsafledte

For funktioner af to variable får man at vide, at gradienten er peger i retningen af den stejleste stigning. Et sådant udsagn bør give anledning til mindst to spørgsmål. Hvad med andre retninger? Og hvorfra ved vi, at den er stejlest? Vi vil forsøge at give et bevis for følgende sætning:

**Sætning 1:** Hvis  $f$  er en funktion af to variable, og  $(x_0, y_0)$  er et punkt i definitionsmængden for  $f$ , så peger gradienten  $\nabla f(x_0, y_0)$  i retningen af den stejleste stigning for grafen af  $f$  i punktet  $(x_0, y_0)$ . Stigningen er bestemt ved  $|\nabla f(x_0, y_0)|$ .

Sætningen kan virke som en ordentlig mundfuld, men det er bare en mere præcis formulering af et upræcist udsagn.

## Retninger

De partielt afledte giver hældningen i retningerne for de to koordinataksler  $x$  og  $y$ . Men der er uendeligt mange retninger at forholde sig til. Et sted, hvor vi har støt på retninger før, er i forbindelse med parameterfremstillingen for den rette linje:

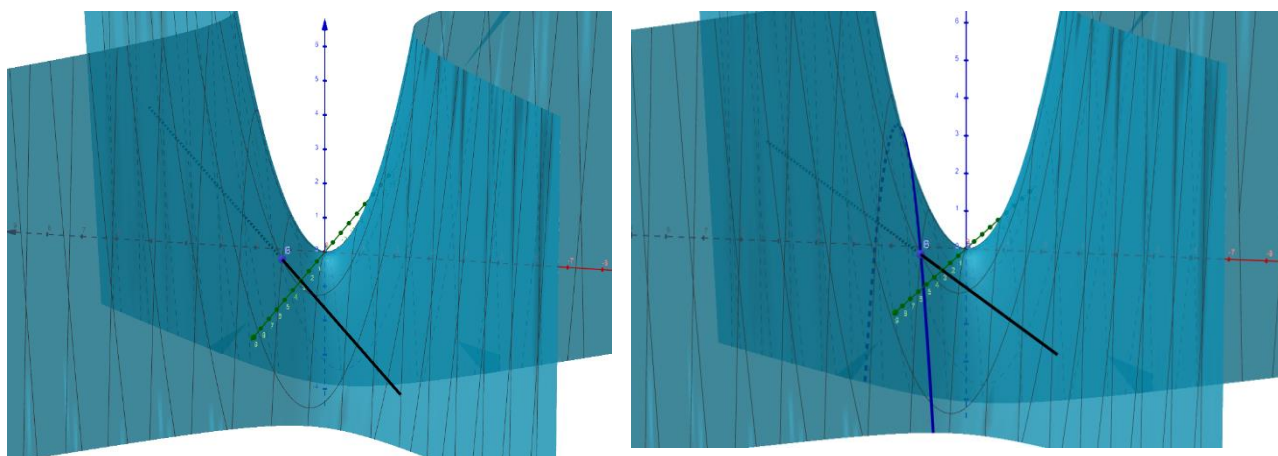
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Her er  $(x_0, y_0)$  det faste punkt, der er nævnt i sætning 1, og vektoren  $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$  er den retning, vi er interesseret i.

Da vi kun er interesseret i retninger, laver vi nu følgende antagelse. *Alle retningsvektorer har længden 1.* Fordi alle retningsvektorer har den samme længde, bliver det kun retningen, der får en indflydelse på den afledte. Hvis vi har en vektor, der ikke har længden 1, så kan vi altid lave en ny vektor med samme retning, men med længde 1, ved at skrive  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ .

Måden man finder en hældning i en bestemt retning, er at sammensætte parameterfremstillingen for den rette linje med  $f$ . På den måde får man kun den del af  $f$ 's graf, der ligger oven over linjen.

**Eksempel:** Vi vælger funktionen  $f(x, y) = x^2 - y^2$  og punktet  $(1, 1)$ . Vi vælger en retning:  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0,44721 \\ -0,89443 \end{pmatrix}$ , hvilket sådan cirka er en enhedsvektor. Vi tegner grafen for  $f$  og linjen med retningsvektor  $\vec{r}$  igennem punktet  $(1, 1)$  i  $xy$ -planen. Oven over linjen tegner vi den kurve, der ligger på grafen for  $f$



Parameterfremstillingen er:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0,44721 \\ -0,89443 \end{pmatrix}$$

Dermed bliver den funktion vi vil finde tangenten til:

$$f(x(t), y(t)) = f(1 + t \cdot 0,44721, 1 - t \cdot 0,89443) = (1 + t \cdot 0,44721)^2 - (1 - t \cdot 0,89443)^2$$

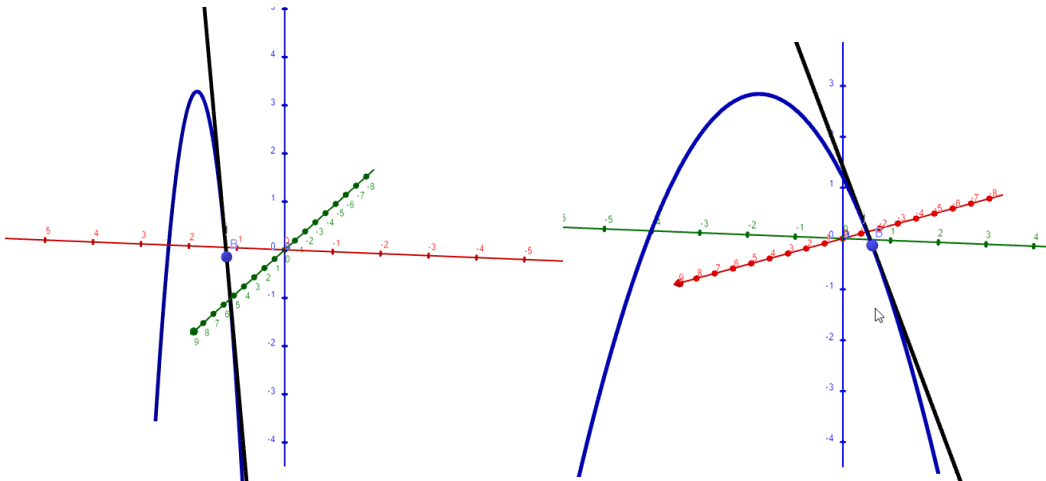
Vi kan nu nøjes med at tegne vores nye kurve og finde hældningen af den. De er tegnet herunder, hvor billedet også bliver drejet lidt. Hældningen findes ved at differentiere funktionen oven over. Det er ret let, da den kun indeholder  $t$  som en variabel.

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = 2 \cdot (1 + t \cdot 0,44721) \cdot 0,447221 - 2 \cdot (1 - t \cdot 0,89443) \cdot (-0,89443)$$

Indsæt  $t = 0$

$$\left. \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \right|_{t=0} = 2 \cdot 0,44721 + 2 \cdot 0,89443 = 2,58886$$

Man skal ikke lade sig narre af billederne, der er drejet, så hældningen ser negativ ud.



Generelt har vi en funktion, der ser sådan ud:  $f(x(t), y(t))$ , hvilket vi kan opfatte som en funktion, der kun afhænger af  $t$ . Det vil sige, at det er en funktion med kun en variabel. Hvis vi sætter formelen for parameterfremstillingen ind:

$$f(x(t), y(t)) = f(x_0 + t \cdot r_1, y_0 + t \cdot r_2)$$

Så kan vi se, at når  $t = 0$ , har vi  $f(x_0, y_0)$ . Med andre ord, hvis vi differentierer  $f(x(t), y(t))$  og sætter  $t = 0$  ind i den differentierede funktion, så får vi hældningen i retningen  $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ . Det giver følgende definition:

**Definition:** Hvis  $f$  er en funktion af to variable, og  $(x_0, y_0)$  er et punkt i definitionsmængden for  $f$ . Hvis  $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$  er en enhedsvektor, og vi har givet følgende parameterfremstilling:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Så er den retningsafledte af  $f$  i retning  $\vec{r}$  givet ved:

$$\left. \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \right|_{t=0}$$

Det er en frygtlig mundfuld med parameterfremstillinger og andet bøvl. Så vi vil straks bevise en sætning, der giver os en simpel formel, uden for mange bøvelede elementer. Men for at kunne gøre det, skal vi kunne differentiere  $f(x(t), y(t))$ . Vi vil uden bevis angive formelen:

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

**Sætning 2:** Hvis  $f$  er en funktion af to variable,  $(x_0, y_0)$  er et punkt i definitionsmængden for  $f$ , og  $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$  er en enhedsvektor, så kan den retningsafledte af  $f$  i retning  $\vec{r}$  beregnes med:

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{r}$$

**Bevis:** Vi beregner:

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}f(x_0 + tr_1, y_0 + tr_2)|_{t=0}$$

Fra differentiationsformlen får vi:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x_0 + t \cdot r_1, y_0 + t \cdot r_2) \cdot r_1 + \frac{\partial}{\partial y}f(x_0 + t \cdot r_1, y_0 + t \cdot r_2) \cdot r_2$$

Vi sætter:  $t = 0$ .

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x_0, y_0) \cdot r_1 + \frac{\partial}{\partial y}f(x_0, y_0) \cdot r_2$$

Men det er det samme som:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}f(x_0, y_0) \\ \frac{\partial}{\partial y}f(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{r}$$

Hvilket vi skulle vise:

## Den stejleste stigning: Bevis for sætning 1

Påstanden er, at gradienten er stejlest, men for at kunne sammenligne hældningerne i de andre retninger med gradienten er vi nødt til at vide, hvor stejl den egentlig er. Det begynder vi med.

Gradienten behøver ikke være en enhedsvektor, så det må vi lave den om til:

$$\vec{r} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}$$

Vi beregner nu den retningsafledte:

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{r} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|} = \frac{|\nabla f(x_0, y_0)|^2}{|\nabla f(x_0, y_0)|} = |\nabla f(x_0, y_0)|$$

Dermed er hældningen på gradienten  $|\nabla f(x_0, y_0)|$ . Da det er en længde må gradienten nødvendigvis være positiv, så nu ved vi, at det er en stigning.

For at kunne vise, at gradienten peger i retning af den stejleste stigning, skal vi bruge en ulighed kaldet Chauchy-Schwarz uligheden. Den siger:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Her det prikproduktet til venstre og gange til højre. Vi giver et bevis til sidst.

Det er nu muligt at bevise første del af sætning 1. Vi beregner den retningsafledte for en vilkårlig retning  $\vec{r}$ :

$$|\nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{r}| \leq |\nabla f(x_0, y_0)| \cdot |\vec{r}| = |\nabla f(x_0, y_0)|$$

Det vil sige, at  $|\nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{r}| \leq |\nabla f(x_0, y_0)|$ . Her har vi benyttet, at  $\vec{r}$  er en enhedsvektor ( $|\vec{r}| = 1$ ).

Så nu ved vi, at alle retningsafledte er mindre end eller lig med tallet  $|\nabla f(x_0, y_0)|$ . Men det er jo netop størrelsen på gradienten.

Det vil sige, at alle retningsafledte er mindre end eller lig med den retningsafledte i retning af gradienten. Vi har nu bevist sætning 1

## Bevis for Cauchy-Schwartz uligheden

Den ulighed vi skal bevise ser således ud:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Hvilket også kan skrives:

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|} \leq |\vec{b}| \quad \text{eller} \quad \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} \leq |\vec{a}|$$

Det kan umiddelbart se mærkeligt ud, men hvis vi husker formlen for længden af en projektion:

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|} = \vec{b}_a \quad \text{eller} \quad \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \vec{a}_b$$

Dermed siger Cauchy-schwarz uligheden, at projektionen er kortere end den vektor, der bliver projiceret:

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|} = \vec{b}_a \leq |\vec{b}| \quad \text{eller} \quad \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \vec{a}_b \leq |\vec{a}|$$

Et hurtigt kig på den tegning, der følger med definitionen for projektion (her  $\vec{a}_b$ ), viser, at sætningen er sand, da projektionen ( $\vec{a}_b$ ) er en katete i en retvinklet trekant, hvor den projicerede vektor ( $\vec{a}$ ) er hypotenusen.

