

Indledning

Har du nogensinde undret dig over, hvordan din lommeregner/computer beregner ting som π , $\sqrt{2}$, e^2 , $\ln(3)$ og lignende? Eller hvordan din computer kan løse ligninger som

$$e^x - x - 1 = 0$$

Så vil vi i disse noter forsøge at give nogle af svarene.

Noterne vil omhandle beregninger, som vi enten selv kan udføre eller få en computer til at gøre for os. Dette kræver noget teknik, som vi vil forsøge at beskrive. Derudover er det også vigtigt at forstå at disse beregninger vil være upræcise. Fx der er uendelig mange decimaler i π , hvorfor vi aldrig kan beregne dem alle. Derfor vil vi være interesseret i størrelsen af de fejl vi kommer til at lave.

Du kan forvente dig følgende af disse noter:

- En tekst, der forsøger at forklare, hvordan beregninger kan udføres
- En tekst, der kan læses af en 3.g elev med matematik på A-niveau.
- En tekst, der giver nogle algoritmer til udregninger

Følgende er ikke mål for teksten:

- At være fuldstændig præcis i alle detaljer (sådanne bøger findes mange af).
- At de beregninger, der vises, er de **mest** moderne/hurtige/smarteste.
- At give computerkode.

Licens

Noter om beregninger © 2026 Jens Chr. Larsen er licenteret under CC BY-SA 4.0. Licens teksten kan ses på <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> 

Følger

Følger optræder mange steder i matematik, og de spiller forskellige roller. Det, vi vil anvende dem til, er at nærme os tal, som vi ikke umiddelbart kan beregne. En tilnærmelse til et tal er ikke præcis, men de tal vi vil beregne består ofte af uendelig mange decimaler, så vi kan alligevel ikke skrive dem op. Derfor er det tilstrækkeligt, at vi nærmer os tallet.

Fordi vi ikke kan være præcise, må vi kunne vurdere, hvor *upræcise* vi er. Derfor indfører vi begrebet om fejl neden for.

Følger

Vi begynder med en definition:

Definition

En nummerering af reelle tal:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$$

Kaldes en følge og skrives $\{x_n\}$. Det vil sige, at vi vælger tal x_n , som vi giver et nummer n fra 1 til ∞

Definitionen fortæller ikke så meget, derfor giver vi fire eksempler.

Eksempel 1

Det første eksempel er følgen:

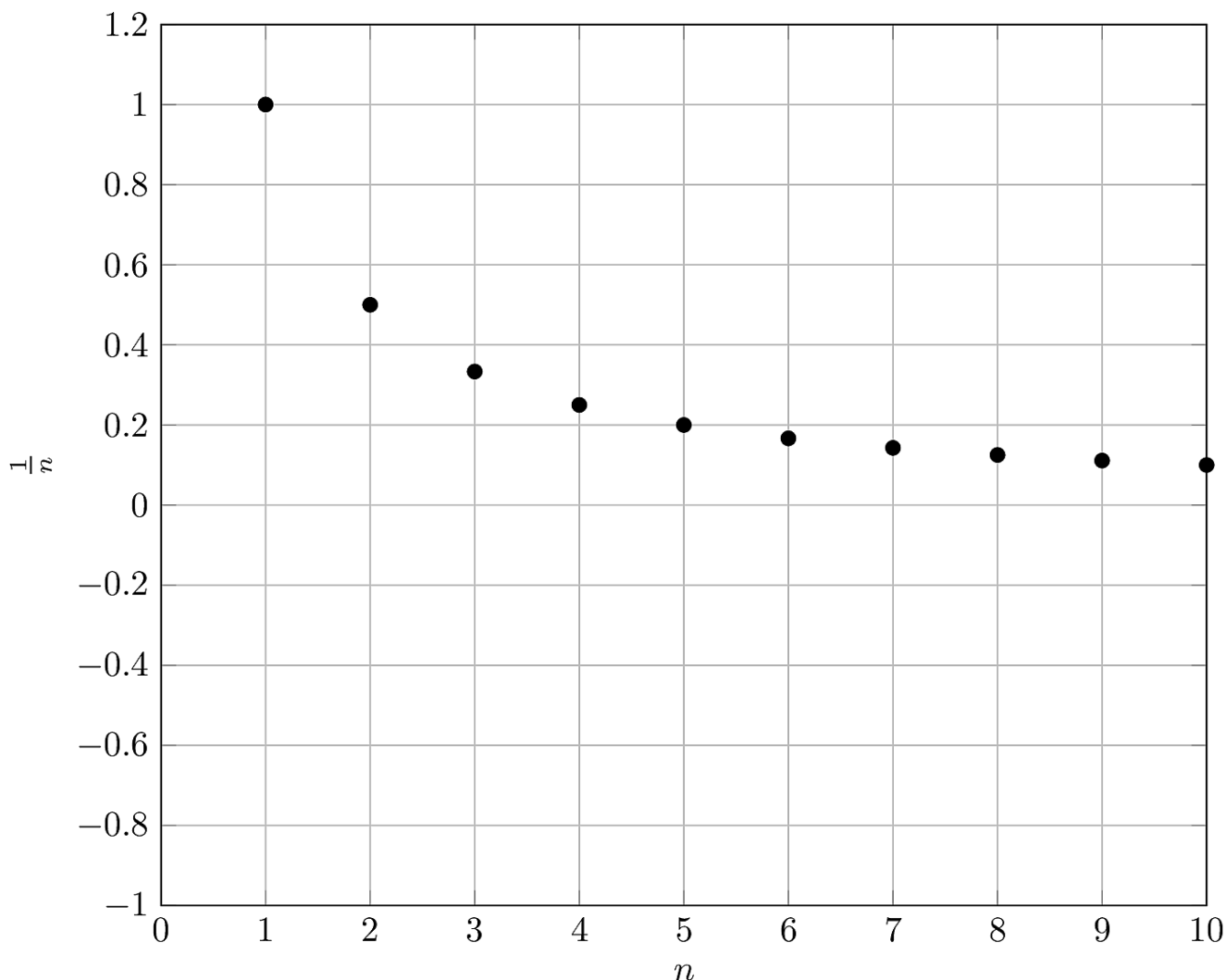
$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

Her angiver vi en metode til at beregne de enkelte tal i en følge. Fx når $n = 1$ så er det første tal i følgen $\left\{ \frac{1}{1} \right\} = 1$, når $n = 2$, så er det andet tal i følgen: $\left\{ \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$, osv. Dermed kan opskrive de første tal i følgen sådan:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

Det ser ud til, at tallene i følgen bliver mindre og mindre, og kommer tættere og tættere på 0, faktisk vil tal nummer 1 mio, være $\frac{1}{1000000}$. Følgende figur viser de første 10 elementer i følgen:

Punktplot for følgen $\{\frac{1}{n}\}$



Noget tyder på, at jo højere vi kommer op i numrene i følgen, jo tættere på kommer vi på 0. Vi siger, at følgen *konvergerer* mod 0. Vi vil gøre dette begreb mere præcist neden for. Vi giver dog lige et eksempel til.

Eksempel 2

Det andet eksempel er følgen:

$$\{(-1)^n\}$$

Igen har vi en metode til at beregne de enkelte tal i følgen. Fx når $n = 1$ så er det første tal i følgen $\{(-1)^1\} = -1$, når $n = 2$, så er det andet tal i følgen: $\{(-1)^2\} = 1$, osv. Dermed kan opskrive de første tal i følgen sådan:

$$-1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

Med andre ord skifter følgen mellem tallene -1 og 1, uanset hvilke numre i følgen vi er ved. Følgende figur viser de første 10 elementer for følgen: