

Valgfagsallokering og operationsanalyse

THOMAS STIDSEN, DTU-Management, Danmarks Tekniske Universitet, tks@imm.dtu.dk

Planlægningen i forbindelse med holdoprettelser er en stor opgave efter gymnasireformen. I artiklen beskriver forfatteren kort, hvordan valgfagsallokering kan betragtes som et matematisk optimeringsproblem.

Som de fleste af dette blads læsere ved, er gymnasiet i de sidste år blevet reformeret så meget, at jeg dårligt kan genkende det. Da jeg for 20 år siden gik på gymnasiet, valgte man *en linie*, matematisk, i starten, *en gren*, matematisk-fysisk og *et sprogfag*, og derefter var en 3-års periode planlagt. Sådan er det helt klart ikke i dag, og det har skabt en række nye planlægningsopgaver for gymnasiernes ledelse. I denne artikel beskriver jeg kort, hvordan planlægningen af valgfagsallokering kan betragtes som et matematisk optimeringsproblem.

Operationsanalyse

Den matematiske disciplin *Operationsanalyse* (eng: Operations Research) studerer, hvordan matematik kan benyttes til at udnytte begrænsede resurser bedst muligt. Den slags kan man bruge matematik til, f.eks. Lineær Programmering (LP) og Heltals Lineær Programmering (eng: Integer Linear Programming, (ILP)) til. Begge typer af matematiske modeller definerer en lineær objekt-funktion til at definere godheden af en løsning, og desuden en række begrænsninger til at definere lovligheden af en løsning. En løsning defineres af værdierne af de variable, som indgår i modellen. De to typer modeller afviger i definitionen af lovlige værdier af variableerne, dvs. deres domæner, variableerne i et LP-program er kontinuerte, mens (nogle af) variableerne i et ILP-program skal antage heltallige værdier.

Givet et antal gymnasieelever i som har valgt mellem nogle valgfag f , dvs. vi har en incidense matrice A_f^i som er lig 1, hvis elev i har valgt fag f , og ellers 0. Der er et antal valgfagsblokke b at

placere valgfag i. Vi definerer nu en *binær* variabel, dvs. en variabel, som kun kan tage værdien 0 eller 1, $x_{f,b}^i$, som er 1, hvis elev i tager fag f i valgfagsblok b og ellers er 0. Vi definerer desuden en heltalsvariabel y_b^f , som antallet af klasser af type f , som oprettes i valgfagsblok b . Vi definerer desuden en maksimal klassestørrelse KS . Vi er nu klar til at definere den ILP-model, som minimerer antallet af oprettede valgfagsklasser, men som samtidig kræver, at alle elevernes valgfagsønsker bliver tilfredsstillet.

Valgfagsallokering

Minimize:

$$\sum_f \sum_b y_b^f \quad (1)$$

subject to:

$$\sum_b x_{f,b}^i = A_f^i \quad \forall i, f \quad (2)$$

$$\sum_b x_{f,b}^i \leq 1 \quad \forall i, b \quad (3)$$

$$\sum_b x_{f,b}^i \leq KS \cdot y_b^f \quad \forall b, f \quad (4)$$

$$x_{f,b}^i \in \{0, 1\} \quad y_b^f \in N_0 \quad (5)$$

Først nogle kommentarer til modellen:

- Objektivfunktionen (1): Godheden af en løsning defineres her simpelthen som det minimale antal oprettede valgfag.
- Begrænsningen (2): Det er et krav for en løsning, at alle elevernes valgfagsønsker skal opfyldes.
- Begrænsningen (3): En elev kan højst deltage i et fag for hver valgfagsblok.
- Begrænsningen (4): For at en elev kan have et fag, skal der oprettes nok valgfag, så der er plads.
- Begrænsningen (5): Domænedefinitionerne for variableerne.

Modelkommentarer

Der kan siges mange ting om ovenstående ILP-valgfagsmodel. For det første, at det netop er en

Nu stil pakning Bloktat: 3 blokke Holdtat: Beregn igen

Vælg løsning

Løsning	Holdfordeling på blok-id	Udelatte pakker	Pakker med uopfyldte elevønsker	Ønsker opfyldt	Dobbeltbookede lærere
Nr. 1	Blok-ID: 1 2 3 4 5 Sum VH - Nye hold der skal oprettes 2 6 2 4 14 EH - Eksisterende hold 5 5 FH - Fælles Fag antal 2 2 Sum 2 6 9 4 21			282 af 282 ønsker Optimal løsning	Lærere Hold / blok-id Vis
Nr. 2	Blok-ID: 1 2 3 4 5 Sum VH - Nye hold der skal oprettes 2 4 3 5 14 EH - Eksisterende hold 5 5 FH - Fælles Fag antal 2 2 Sum 9 4 3 5 21			282 af 282 ønsker Optimal løsning	Lærere Hold / blok-id Vis
Nr. 3	Blok-ID: 1 2 3 Sum VH - Nye hold der skal oprettes 2 6 6 14 EH - Eksisterende hold 5 5 FH - Fælles Fag antal 2 2 Sum 9 6 6 21		VH 4845B Biologi 2008/09 EfterAar Biologi B (2s.)* 1 VH 4851B Fysik 2008/09 EfterAar Fysik B (2s.)* 1	280 af 282 ønsker Ej optimal løsning	Lærere Hold / blok-id Vis
Nr. 4	Blok-ID: 1 2 3 Sum VH - Nye hold der skal oprettes 7 3 6 16 EH - Eksisterende hold 5 5		VH 4851B Fysik 2008/09 EfterAar Fysik B (2s.)* 1	281 af 282 ønsker Ej optimal løsning	Lærere Hold / blok-id Vis

Klip fra softwarepakken Lectio. Brugeren kan vælge mellem flere løsninger.

model! Dette betyder, at der er set bort fra en række krav for at nå til en abstrakt forståelse af problemet. Modelleringsprocessen, dvs. arbejdsprocessen, hvor en model opstilles for et planlægningsproblem, tvinger ofte til, at man skærer en tå og klipper en hæl. Risikoen er, at man ender med en smuk abstrakt model, som desværre ikke repræsenterer et realistisk problem, eller omvendt, at modellen er blevet for kompleks til at overskue eller for kompleks til at løse. Bemærk at den ovenstående model dog allerede inkluderer: forskellige valg af eleverne, forskelligt antal valgfagsblokke, f.eks. 3, 4 eller 5, og forskellig max. klassestørrelse.

Man kunne forestille sig en række yderligere forbedringer af modellen:

- Begrænsninger på antallet af givne klasser i en bestemt blok, pga. f.eks. lokalemangel.
- Tilladelse til ikke at opfylde alle elevønsker.
- Forskellig klassestørrelse.
- Inkludering af lærer/fag-kombinationer.

Jeg er sikker på, at dette blads læsere selv kan foreslå en række ekstra krav/forbedringer.

Den ovenstående modelkritik er relevant og kan rejses overfor stort set alle former for matematiske modeller, de er aldrig fuldstændigt præcise, f.eks. er Newtons 3 klassiske modeller siden blevet gjort mere præcise af Einstein.

Der er en anden form for kritik, som jeg derimod ikke betragter som relevant: Afvisning af modellen, fordi den repræsenterer et "positivistisk" verdensbillede osv. Uanset hvad man måtte mene om optimering, matematisk planlægning og lignende metoder, så er det et faktum, at der er en begrænset mængde af resurser, dvs. gymnasielærere, til at gennemføre undervisningen. Der truer en massiv mangel på gymnasielærere, som end ikke en (urealistisk) forøgelse af gymnasiebudgetterne kan ændre på. En afvisning af den operationsanalytiske metode løser ikke dette problem, men tager et vigtigt redskab fra ledelsen. Bemærk, at ovenstående modeller kun kan betragtes som redskaber, i sidste ende har en ledelse selvfølgelig frihed til at ændre eller forkaste de planer, som matematisk metoder frembringer.

Modelløsning

Som matematiker er man typisk fascineret af en

model, for modellens egen skyld, men for udenforstående kan dette altså ikke bruges til så meget: For at en matematisk model kan benyttes i planlægningen skal denne kunne løses! En lovlig løsning til en LP- eller ILP-model er en tilde-
ling af værdier til variablerne, så alle begrænsninger er overholdt. Den optimale løsning er så den bedste lovlige løsning, dvs. i dette tilfælde den lovlige løsning, for hvilket summen af antallet af oprettede fag er mindst. Til at løse LP- og ILP-modeller benyttes i dag avanceret matematiske programmer, som kan løse meget store LP-modeller, men kun ILP-modeller af moderat størrelse. Der er forskellige gode matematiske årsager til, at ILP-modeller løsningsmæssigt er meget sværere at håndtere. Alle solvere af ILP-modeller benytter såkaldte Branch&Cut algoritmer, som udfører en avanceret form for udtømmende søgning.

Heuristiske løsningsmetoder

For at forstå omfanget af dette, kan vi forestille os et middelstort gymnasium, som har 400 elever, 5 valgfagsblokke og 3 valgfagsønsker pr. elev. Bare for x -variablerne er der $2^{400 \cdot 5 \cdot 3} = 2^{6000}$ mulige løs-

ninger. Selvom dette inkluderer en stor mængde ulovlige løsninger, og løserne benytter mængder af matematik og tricks, er dette antal muligheder stadig enormt, så der er ingen udsigt til, at disse kan løse problemet.

Som alternativ til en optimal løsning er vi nu nødt til at vende os til heuristiske løsningsmetoder, dvs. metoder som finder lovlige løsninger, men som ikke kan garantere, at den bedste fundne løsning er optimal. Der er en række forskellige såkaldte *meta-heuristiske algoritmer*, f.eks. Simuleret Udglødning, TABU-søgning eller Genetiske Algoritmer. Fælles for disse er, at de starter fra en tilfældig startløsning, som så iterativt forbedres. Alle disse algoritmer benytter altså en computer som en stor talknuser til at afprøve en stor mængde af løsninger og så returnere den bedste, når den afsatte tid er brugt.

Meta-heuristisk løsning af en matematisk model er en radikal anden tilgang til optimering. Disse, som bl.a. udnytter den revolution inden for processorhastighed, som er sket de sidste 40-50 år, har den fordel, at de kan give os gode (men ikke optimale) løsninger til svært løselige matematiske modeller. Design og programmering af en meta-heuristik til et optimeringsproblem er både en kunst og en videnskab, og det vil føre for vidt at diskutere det her.

Løsning af valgfagsallokering

Alle disse teoretiske overvejelser er spændende, men for landets gymnasierectorer, eller rettere for gymnasieinspektorerne, er dette et yderst relevant problem, som de skal løse hvert år, så hvad kan der gøres? To af mine specialestuderende, Sune Binzer og Sune Høj Kjeldsen, har i forbindelse med deres speciale på DTU implementeret en meta-heuristik til løsning af valgfagsallokeringsproblemet. Deres algoritme er nu en del af softwarepakken *Lectio* og er derfor i 2008 benyttet til mere end 100 gymnasiers valgfagsallokering. Der har i testperioden været udtrykt generel tilfredshed med systemet, som har reduceret en 14 dages planlægningsperiode til 40 sekunders programafvikling. Denne hurtige planlægning muliggør også, at planlæggerne lettere kan eksperimentere med forskellige krav til løsningen, f.eks. forskelligt antal valgfagsblokke osv. ◇

Pakketype	Fag	Pakke	Elev
VH	4844B Billedkunst	2008/09 EfterAar Billedkunst B (2s.)*	11
VH	4844C Billedkunst	2008/09 EfterAar Billedkunst C (2s.)*	11
VH	4845B Biologi	2008/09 EfterAar Biologi B (2s.)*	19
VH	4848A Engelsk	2008/09 EfterAar Engelsk A (2s.)*	64
VH	4891C Erhvervsøkonomi	2008/09 EfterAar Erhvervsøkonomi C (2s.)*	51
VH	4892C Filosofi	2008/09 EfterAar Filosofi C (2s.)*	31
VH	4850A Fransk fort.	2008/09 EfterAar Fransk fort. A (2s.)*	6
VH	4851B Fysik	2008/09 EfterAar Fysik B (2s.)*	15
VH	4897B Idræt	2008/09 EfterAar Idræt B (2s.)*	38
VH	4856B Kemi	2008/09 EfterAar Kemi B (2s.)*	17
VH	4858A Matematik	2008/09 EfterAar Matematik A (2s.)*	35
VH	4932B Matematik	2008/09 EfterAar Matematik B (2s.)*	21
VH	4858B Matematik	2008/09 EfterAar Matematik B (2s.)*	7
VH	4860B Musik	2008/09 EfterAar Musik B (2s.)*	12
VH	4861B Naturgeografi	2008/09 EfterAar Naturgeografi B (2s.)*	83
VH	4911C Psykologi	2008/09 EfterAar Psykologi C (2s.)*	88
VH	4866B Samfundsfag	2008/09 EfterAar Samfundsfag B (2s.)*	24
VH	4869A Tysk forts	2008/09 EfterAar Tysk forts A (2s.)*	10

Lectio-programmet kører i dag.